



# Étude des mécanismes d'interaction fluide-structure d'un cœur RNR-Na lors de l'évacuation d'une poche de gaz

Lucia Sargentini

## ► To cite this version:

Lucia Sargentini. Étude des mécanismes d'interaction fluide-structure d'un cœur RNR-Na lors de l'évacuation d'une poche de gaz. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2014. Français. NNT : 2014PA066459 . tel-01127561

**HAL Id: tel-01127561**

**<https://theses.hal.science/tel-01127561>**

Submitted on 7 Mar 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université Pierre et Marie Curie

  cole doctorale

Sciences mécaniques, acoustique, électronique et robotique de Paris

ED 391

**  tude des mécanismes d'interaction fluide-structure  
d'un cœur RNR-Na  
lors de l'évacuation d'une poche de gaz**

Thèse de doctorat de Mécanique des fluides

Par Lucia SARGENTINI

Dirigée par Arnault Monavon

Responsable CEA Jean-Paul Magnaud

Présentée et soutenue publiquement le 17 Décembre 2014 devant le jury composé de :

M.	WALTER AMROSINI	Professeur Université de Pise	Rapporteur
M.	DANIEL BROCC	Ingénieur CEA-Saclay	Examineur
M.	EMMANUEL DE LANGRE	Professeur ��cole Polytechnique-Palaiseau	Rapporteur
Mme	HÉLÈNE DUMONTET	Professeur Université Pierre et Marie Curie	Examineur
M.	JEAN-PAUL MAGNAUD	Ingénieur CEA-Saclay	Encadrant
M.	LAURENT MARTIN	Chef du projet RNR-Na CEA-Cadarache	Invité
M.	ARNAULT MONAVON	Maître de conférence Université Pierre et Marie Curie	Directeur de thèse



# Remerciements

Tout d'abord je voudrais remercier Walter Ambrosini et Emmanuel De Langre d'avoir accepté de relire cette thèse et d'en être rapporteurs. La version finale de ce mémoire a bénéficié de leur lecture très attentive et de leurs remarques précieuses. Je tiens à remercier Hélène Dumontet d'avoir accepté d'être président du jury. Je remercie également Daniel Broc d'avoir participé à ce travail et d'assister à sa présentation finale, Laurent Martin, qui m'a permis de rejoindre le projet RNR-Na.

Je voudrais remercier Arnault Monavon, mon directeur de thèse. Il a toujours été disponible, à l'écoute de mes nombreuses questions, et s'est toujours intéressé à l'avancée de mes travaux. Enfin, ses nombreuses relectures et corrections de cette thèse ont été fondamentales. Pour tout cela merci.

Je tiens à remercier mon encadrant Jean-Paul Magnaud, pour m'avoir fait confiance il y a trois ans, puis pour m'avoir guidée, encouragée, conseillée. Cette thèse lui doit beaucoup.

J'ai travaillé pendant trois ans dans le Laboratoire des Applications en Thermohydraulique et Mécanique des fluides (LATF) et le Laboratoire d'Instrumentation et d'Expérimentation en mécanique des Fluides et Thermohydraulique (LIEFT). Je remercie l'ensemble des personnes qui font partie de ces laboratoires pour m'avoir accueillie chaleureusement et pour avoir partager leur expérience avec moi. Je remercie chaudement Danielle Gallo et Patricia Salvatore, pour m'avoir permis d'en fait partie.

En particulier, mes remerciements les plus sincères vont à Benjamin Cariteau, sans lui ce travail n'aurait pas vu le jour. Je n'oublie pas Jean-Luc Widloecher, pour son travail sans égal, et Olivier Norvez, pour son aide technique.

Je remercie les stagiaires avec lesquels j'ai eu la chance de travailler, Morena et Gianluca.

Je souhaite remercier les thésards Elena, Amina, Roberta, Emanuele, Olivier et Jean-François, avec lesquels j'ai partagé joie et douleur d'une thèse.

Une mention spéciale pour ceux qui sont devenus plus que des collègues : Constantin, Fred, Véronique, Danielle, Sergey, Etienne, Alberto, Alexey, Jean-Paul G., Gilles, Alain G., Alain C., Sonia, Nadia, Matteo.

Enfin, je remercie mon mari Enrico, ma famille et mes amis les plus proches, qui ont su me soutenir, me supporter, m'encourager.



# Résumé

Cette thèse vise à améliorer la compréhension du comportement d'un cœur de réacteur à neutrons rapides refroidi au sodium (RNR-Na) lors de vibrations par l'analyse des phénomènes d'interaction fluide-structure. Notamment, nous étudions le gerbage du cœur de Phénix lors des AURNs et les oscillations sismiques pour le projet ASTRID.

Pour ce faire, trois approches ont été suivies : élaboration de solutions analytiques, développement de modèles numériques et réalisation d'expériences.

Nous avons réalisé une carte d'écoulement qui identifie les régimes présents dans l'inter-assemblage pendant les échelles de temps courtes (AURNs) et longues (séismes). Elle a servi à identifier le système d'équations (Navier-Stokes, Euler ou Euler linéarisées) le plus adapté à représenter le comportement du fluide pour les différents cas. Pour la première fois, à notre connaissance, une solution analytique du champ de pression et de vitesse a été obtenue pour le cas d'oscillations libres et de forts confinements.

Nous avons conçu et dimensionné deux maquettes, composées respectivement par 2 couronnes d'assemblages (PISE-2c) et 1 assemblage hexagonal (PISE-1a). Chaque assemblage vibre avec un mouvement de type gerbage en translation (mouvement 2D) à une fréquence d'oscillation en eau du même ordre que la fréquence en sodium liquide d'un assemblage de Phénix.

Des essais d'oscillations libres en air et en eau ont été réalisés pour étudier les caractéristiques dynamiques de l'assemblage. Bien que l'oscillation soit censée être 2D, un écoulement 3D du type « jambage » se produit dans l'inter-assemblage. Ceci conduit à une baisse de la fréquence de vibration par rapport à la théorie bidimensionnelle.

Les essais ont été modélisés avec un modèle numérique bidimensionnel à l'aide de Cast3M pour le couplage fluide-structure. Le modèle résout les équations de Navier-Stokes couplées avec l'équation de la dynamique de corps rigide. Le « modèle *up $\phi$*  », composé par les équations d'Euler linéarisées couplées avec l'équation de la dynamique, a également été utilisé pour représenter en 3D la maquette PISE-1a.

Afin de se rapprocher des essais, il faut imposer dans les modèles bidimensionnels une force fluide inférieure, qui prenne en compte les effets de l'écoulement 3D.

**Mot-clès :** hexagone, RNR-Na, IFS, vibrations, gerbage, Navier-Stokes, carte d'écoulement.



# Abstract

The purpose of this study is to improve the knowledge about the core behavior of a sodium fast breeder reactor (Na-FBR) during vibrations through the fluid-structure interaction analysis. Namely, we investigate the flowering of the Phénix core during the SCRAM for negative reactivity (AURN) and the seismic behavior of the core of Astrid project.

Three approaches are followed : experimental campaign, performing of analytical solution and development of numerical model.

We create a flow regime map to identify the flow regimes in the fluid gap for very short times scales (as AURN) as well as longer time scales (as seismic oscillations). The most suitable equation system (Navier-Stokes, Euler or linearized Euler) is chosen to model the fluid flow in the numerical code. To our knowledge, for the first time, an analytical solution for free vibration and very narrow gaps is proposed.

We designed two experimental apparatus (PISE-1a and PISE-2c) composed respectively by 1 and 19 hexagonal assemblies (two crowns) of Poly-methyl methacrylate (PMMA). Every PMMA assembly is fixed to a stainless steel twin-blades support allowing only orthogonal oscillations with respect to generating line of assembly. The twin-blades supports are designed to give the same range frequency of Phénix assembly in liquid sodium.

The experimental equipment PISE-1a is used to determine the dynamic characteristics of PISE-2c assembly, to calibrate instrumentation and for validating our numerical model. Free vibration tests in air are performed to evaluate the dynamic characteristics of the body. Free vibration experiments in water allow to assess the added mass and added damping effect on the frequency. Even though the fluid flow during vibration should be completely bidimensional, the fluid flow is affected by a 3D effect - named 'jambage' - at the top and the basis of the assembly. This effect produces a lower frequency than the theoretical value.

Tests are modeled with a bidimensional numerical model through the finite-elements method with the Cast3M code. The fluid is viscous and incompressible, whereas the structure is considered as a mass-damped-spring system with a 1 degree of freedom. Our model is solved by the Navier-Stokes equations coupled by the dynamic equation of structures. Also the « *up $\phi$*  model » is used to have a 3D representation of PISE-1a.

Because of the 3D fluid flow presence, to reproduce the oscillation of a test, we have to impose a lower fluid force in the 2D numerical model.

**Keyword** : hexagon, Na-FBR, FSIS, vibrations, flowering, Navier-Stokes, flow regime map





# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>I</b>	<b>Position du problème et analyse phénoménologique</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Position du problème et état de l’art</b>	<b>11</b>
2.1	Position du problème . . . . .	11
2.1.1	Équations et conditions aux frontières . . . . .	12
2.1.1.1	Équations pour le fluide . . . . .	12
2.1.1.2	Équations de la dynamique du corps rigide . . . . .	13
2.1.1.3	Conditions aux frontières : couplage fluide-structure . . . . .	13
2.1.1.4	Approximations . . . . .	13
2.2	État de l’art . . . . .	14
2.2.1	Équations d’Euler linéarisées . . . . .	14
2.2.1.1	Méthodes analytiques . . . . .	14
2.2.1.2	Méthodes numériques . . . . .	15
2.2.2	Écoulement non-visqueux et non-linéaire : équations d’Euler . . . . .	17
2.2.2.1	Méthodes numériques . . . . .	17
2.2.3	Écoulement visqueux et linéaire : équations de Navier-Stokes linéarisées . . . . .	18
2.2.3.1	Méthodes analytiques . . . . .	18
2.2.3.2	Méthodes numériques . . . . .	19
2.2.4	Méthodes pour un écoulement visqueux et non-linéaire : équations de Navier-Stokes complètes . . . . .	20
2.2.4.1	Méthodes analytiques . . . . .	20
2.2.4.2	Méthodes numériques . . . . .	21
2.2.5	Présentation des essais . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Analyse phénoménologique et solution analytique pour des oscillations libres et forcées</b>	<b>25</b>
3.1	Analyse phénoménologique . . . . .	25
3.1.1	Équations de Navier-Stokes adimensionnées . . . . .	25
3.1.2	Carte d’écoulement pour le cas de deux cylindres concentriques . . . . .	28

3.1.3	Régime d'écoulement laminaire ou turbulent . . . . .	29
3.1.4	Conclusions . . . . .	30
3.2	Oscillations libres : solution analytique 2D pour deux cylindres concentriques . .	30
3.2.1	Description du problème . . . . .	31
3.2.2	Analyse de l'échelle de temps . . . . .	32
3.2.3	Solution pour un écoulement de fluide visqueux . . . . .	33
3.2.4	Solution pour un écoulement fluide non-visqueux . . . . .	33
3.2.5	Conclusions . . . . .	34
3.3	Oscillations imposées : solution analytique 2D pour deux cylindres concentriques	35
3.3.1	Solution pour un fluide visqueux et forts confinement . . . . .	35
3.3.2	Validation de la solution analytique : comparaison avec la solution de Chen [8]	36
3.3.3	Conclusions . . . . .	36

## II Présentation et validation des modèles numériques 39

### 4 Modèles numériques d'IFS : description du modèle 2D « Cast3M Navier-Stokes » et du modèle « Cast3M $up\phi$ » 41

4.1	Modèle « Cast3M Navier-Stokes » : équations de Navier-Stokes en formulation ALE	41
4.1.1	Formulation variationnelle des équations de Navier Stokes . . . . .	43
4.1.2	Algorithme de Projection incrémentale : masse volumique constante . . .	44
4.1.3	Algorithme de Newmark . . . . .	44
4.1.4	Discrétisation . . . . .	45
4.1.5	Calcul de la masse ajoutée . . . . .	45
4.2	Modèle « Cast3M $up\phi$ » : équations d'Euler linéarisées . . . . .	46
4.2.1	Formulation variationnelle des équations d'Euler linéarisées . . . . .	46
4.2.2	Coefficient d'amortissement de Rayleigh $C_{Ray}$ . . . . .	48
4.3	Conclusions . . . . .	48

### 5 Oscillations imposées et libres : validation du modèle numérique « Cast3M » Navier-Stokes en géométrie cylindrique et application à la géométrie hexagonale 49

5.1	Mouvement imposé : validation du modèle numérique 2D en géométrie cylindrique et application à la géométrie hexagonale . . . . .	49
5.1.1	Validation du modèle numérique 2D « Cast3M Navier-Stokes » : géométrie cylindrique . . . . .	49
5.1.1.1	Champ de vitesse dans le jeu : comparaison entre solution numérique et solution analytique . . . . .	50
5.1.1.2	Coefficients de masse ajoutée $C_M$ : comparaison entre solution numérique et solution analytique . . . . .	50
5.1.1.3	Coefficient d'amortissement ajouté $C_D$ : comparaison entre solution numérique et solution analytique . . . . .	54
5.1.1.4	Conclusions pour la validation du modèle numérique en géométrie cylindrique . . . . .	54

5.1.2	Effets de la géométrie du corps vibrant : comparaison entre un solide hexagonal et cylindrique . . . . .	55
5.1.2.1	Comparaison des champs de vitesse dans le jeu . . . . .	55
5.1.2.2	Comparaison des coefficients de masse ajoutée $C_M$ . . . . .	56
5.1.2.3	Comparaison des coefficients d'amortissement ajouté $C_D$ . . . . .	57
5.1.2.4	Conclusions concernant la comparaison entre géométries cylindrique et hexagonale . . . . .	58
5.2	Mouvement libre : validation du modèle numérique 2D en géométrie cylindrique et application à la géométrie hexagonale . . . . .	59
5.2.1	Comparaison du modèle « Cast3M Navier-Stokes » avec la solution analytique et le modèle « Cast3M $up\phi$ » pour le cas d'oscillations libres . . . . .	59
5.2.1.1	Convergence du modèle « Cast3M Navier-Stokes » . . . . .	60
5.2.1.2	Convergence du modèle 2D « Cast3M $up\phi$ » . . . . .	63
5.2.1.3	Évaluation du coefficient de masse ajoutée $C_M$ et du coefficient d'amortissement $C_D$ . . . . .	65
5.2.1.4	Comparaison des déplacements, fréquences et taux d'amortissement avec la solution analytique et le modèle « Cast3M $up\phi$ » . . . . .	67
5.2.1.5	Analyse des champs de vitesse dans le jeu . . . . .	68
5.2.1.6	Analyse des coefficients de masse ajoutée $C_M$ et d'amortissement ajouté $C_D$ pour la géométrie cylindrique . . . . .	69
5.2.2	Analyse du coefficient de masse ajoutée $C_M$ et d'amortissement ajouté $C_D$ pour la géométrie hexagonale . . . . .	70
5.2.3	Conclusion . . . . .	72

### III Présentation des maquettes et analyse expérimentale 75

6	Description des installations expérimentales PISE-2c et PISE-1a et analyse des essais	77
6.1	Installations expérimentales : PISE-1a (mono-assemblage) et PISE-2c (2 couronnes)	77
6.1.1	Conception de l'installation expérimentale . . . . .	77
6.1.2	Dimensionnement de l'assemblage bilame . . . . .	78
6.1.3	Dimensionnement de l'assemblage mono-lame . . . . .	81
6.1.4	PISE-1a : maquette mono-assemblage . . . . .	81
6.1.5	PISE-2c : maquette 19 assemblages . . . . .	82
6.1.6	Plan d'essais . . . . .	83
6.2	Présentation et analyse des essais, simulations numériques sur PISE-1a . . . . .	84
6.2.1	Essais en air sur la maquette PISE-1a . . . . .	84
6.2.1.1	Plage de variation de la fréquence et du taux d'amortissement pour les essais en air . . . . .	85
6.2.1.2	Tests sur le parallélisme de l'assemblage PISE-1a . . . . .	85
6.2.2	Simulations numériques des essais en air sur la maquette PISE-1a . . . . .	90

6.2.2.1	Détermination de la masse du solide associée au mouvement : contribution des lames . . . . .	90
6.2.2.2	Résultats des simulations avec le modèle « Cast3M Navier-Stokes » en air . . . . .	90
6.2.3	Essais en eau sur la maquette PISE-1a . . . . .	91
6.2.3.1	Plage de variation de la fréquence et du taux d'amortissement pour les essais en eau . . . . .	93
6.2.4	Visualisation de l'écoulement vertical : essais en eau avec PIV . . . . .	95
6.2.4.1	Visualisation du plan parallèle à la face de l'hexagone et perpen- diculaire au déplacement . . . . .	96
6.2.4.2	Visualisation du plan perpendiculaire à l'inter-assemblage et pa- rallèle au déplacement . . . . .	97
6.2.4.3	Visualisation du plan transversal au-dessus de la tête de l'hexagone	99
6.2.5	Essais à différentes hauteurs d'eau sur la maquette PISE-1a . . . . .	99
6.2.6	Simulations numériques des essais en eau sur la maquette PISE-1a . . . .	104
6.2.6.1	Comparaison entre essai - « Cast3M Navier-Stokes » 2D - « Cast3M <i>up<math>\phi</math></i> » 2D . . . . .	105
6.2.6.2	Comparaison essai - « Cast3M <i>up<math>\phi</math></i> » 3D . . . . .	106
6.2.7	Conclusions . . . . .	108
<b>7</b>	<b>Conclusions</b>	<b>111</b>
<b>Annexe A</b>	<b>Solution analytique pour une oscillation imposée en milieu fortement confiné</b>	<b>113</b>
A.1	Système d'équations en coordonnées cylindriques . . . . .	113
A.2	Solution analytique du champ de vitesse et champ de pression . . . . .	116
<b>Annexe B</b>	<b>Solution analytique pour une oscillation libre en milieu fortement confiné</b>	<b>119</b>
B.1	Système d'équations en coordonnées cylindriques . . . . .	119
B.2	Solution pour un écoulement fluide visqueux . . . . .	122
B.3	Solution pour un écoulement fluide non visqueux . . . . .	123
<b>Annexe C</b>	<b>Stabilité du modèle numérique 2D « Cast3M Navier-Stokes »</b>	<b>125</b>
	<b>Table des figures</b>	<b>128</b>
	<b>Liste des tableaux</b>	<b>132</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>133</b>

# Liste des symboles

## ACRONYMES

AC	Assemblages Combustibles
ALE	formulation Arbitraire Lagrangienne Eulérienne
AURN	Arrêts d’Urgence par insertion de Réactivité Négative
DAC	Dispositif d’Assemblage Cobalt
NaI	Iodure de sodium
PIV	Particle Image Velocimetry
PNL	Protections Neutroniques Latérales
RNR-Na	Réacteur à Neutrons Rapides refroidi au Sodium liquide

## SYMBOLES ROMAINS

$a$	déplacement du solide	[m]
$a_0$	amplitude d’oscillation maximum	[m]
$A_f$	surface transversale du fluide	[m <sup>2</sup> ]
$A_s$	surface transversale du solide	[m <sup>2</sup> ]
$b$	jeu entre structure interne et externe, espace inter-assemblage	[m]
$c$	vitesse du son	[m/s]
$c_s$	coefficient d’amortissement de la structure	[kg/m/s]
$C_D$	coefficient d’amortissement ajouté	
$C_M$	coefficient de masse ajoutée	
$C_{Ray}$	coefficient d’amortissement de Rayleigh	
$\hat{e}_r$	vecteur radial unitaire	
$\hat{e}_\theta$	vecteur tangentiel unitaire	
$\hat{e}_x$	vecteur tangentiel unitaire en approximation du plan tangent	
$\hat{e}_X$	vecteur horizontal unitaire	
$\hat{e}_y$	vecteur radial unitaire en approximation du plan tangent	
$\hat{e}_Y$	vecteur vertical unitaire	
$E_{cf}$	énergie cinétique du fluide	[J]
$E_{cs}$	énergie cinétique du solide	[J]
$E_{dis}$	énergie dissipative du fluide	[J]
$E_{mec}$	énergie mécanique du système solide-fluide	[J]

$E_{ps}$	énergie élastique du solide	[J]
$E_{ts}$	énergie totale du solide	[J]
$E_0$	énergie totale initiale du système solide-fluide	[J]
$f_{air}$	fréquence d'oscillation du solide en air	[Hz]
$f_{eau}$	fréquence d'oscillation du solide en eau	[Hz]
$f_{fric}$	facteur de Darcy	
$F_f$	force fluide	[N/m]
$H$	hauteur de l'hexagone	[m]
$k_s$	raideur du solide	[N/m]
$M_{add}$	masse ajoutée linéique	[kg/m]
$m_s$	masse du solide	[kg]
$\hat{n}$	vecteur unitaire	
$p$	pression relative	[Pa]
$p_0$	pression du fluide au repos	[Pa]
$\bar{p}$	pression adimensionnée	
$P$	pression absolue	[Pa]
$r$	cordonnée radiale	[m]
$R_1$	rayon du cylindre interne	[m]
$R_2$	rayon du cylindre extérieure	[m]
$u_r$	vitesse radiale du fluide	[m/s]
$u_\theta$	vitesse tangentielle du fluide	[m/s]
$\bar{u}$	vitesse tangentielle adimensionnée	
$U$	échelle de la vitesse tangentielle $\bar{u}$	[m/s]
$\bar{v}$	vitesse radiale adimensionnée	
$V$	échelle de la vitesse radiale $\bar{v}$	[m/s]
$w$	vitesse verticale du fluide	[m/s]
$w_g$	vitesse de grille	[m/s]
$x$	cordonnée tangentielle en approximation du plan tangent	[m]
$\bar{x}$	cordonnée tangentielle en approximation du plan tangent adimensionnée	
$X$	cordonnée horizontale	[m]
$y$	cordonnée radiale en approximation du plan tangent	[m]
$\bar{y}$	cordonnée radiale en approximation du plan tangent adimensionnée	
$Y$	cordonnée verticale	[m]

## SYMBOLES GRECS

$\beta$	paramètre d'amortissement [20]	
$\Gamma_{ext}$	paroi fixe du solide	[m]
$\Gamma_s$	paroi mobile du solide	[m]
$\delta_\nu$	épaisseur de la couche limite	[m]
$\delta p$	échelle de pression	[Pa]
$\varepsilon$	$a_0/b$	
$\eta$	$b/R_2$	

$\theta$	coordonnée tangentielle	[rad]
$\nu$	viscosité cinématique du fluide	[m <sup>2</sup> /s]
$\xi$	taux d'amortissement	
$\rho$	masse volumique du fluide	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\tau_\nu$	échelle de temps de la création de tourbillons	[s]
$\phi$	déphasage entre vitesse du solide et force fluide	[rad]
$\Phi$	potentiel du déplacement	[m <sup>2</sup> ]
$\chi$	paramètre de Mulcahy [33]	
$\omega$	pulsation d'oscillation en air de la structure	[rad/s]
$\Omega$	volume du système fluide-solide	[m <sup>3</sup> ]

### GROUPES DIMENSIONNELS

$St_1$	Nombre de Strouhal	$\omega R_1/U$
$St_2$	Nombre de Strouhal	$\omega R_2/U$
$Re$	Nombre de Reynolds	$Ub/\nu$
$\sigma$	Nombre de Stokes	$\omega b^2/\nu$





# Introduction

Le cœur d'un réacteur à neutrons rapides refroidi au sodium liquide (RNR-Na) est constitué d'assemblages combustibles et de protections neutroniques à section hexagonale assimilables à des poutres très élancées. Pour des raisons d'optimisation neutronique, ces assemblages sont très proches les uns des autres.

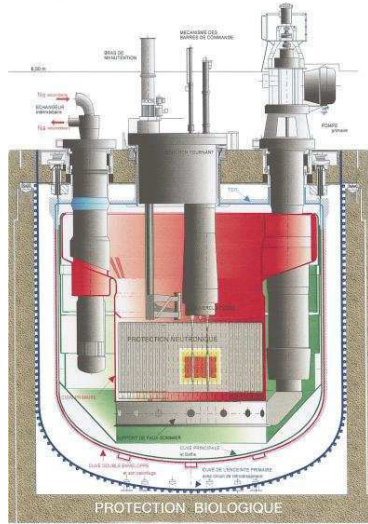
Lors de certains phénomènes vibratoires, le sodium liquide entourant chaque assemblage est à l'origine d'une force de pression élevée sur la structure, en raison du très fort confinement. L'effet du fluide peut donc engendrer des changements dans le comportement de la structure oscillante [39]. En conséquence, comprendre comment le fluide interagit avec la structure est fondamental pour pouvoir améliorer la conception des nouveaux assemblages et en prévenir la rupture ou l'endommagement.

Notamment, l'analyse des phénomènes d'interaction fluide-structure (IFS) est à la base des études pour décrire le comportement du cœur du Projet ASTRID (Advanced Sodium Technological Reactor for Industrial Demonstration) (Fig. 1.1b) lors d'un séisme et aussi pour expliquer certains événements survenus dans le réacteur Phénix (Fig. 1.1a), réacteur exploité pendant 35 ans jusqu'au 2009.

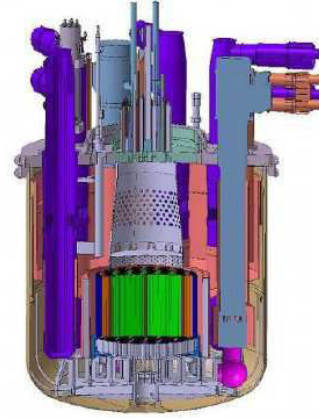
En effet, entre 1989 et 1990, quatre Arrêts d'Urgence automatiques par insertion de Réactivité Négative (AURN) se sont produits sur ce réacteur. L'insertion de réactivité négative a été mise en évidence par la variation très rapide du signal neutronique mesuré dans les chambres neutroniques situées au-dessous de la cuve du réacteur et permettant de suivre sa puissance neutronique. Le signal neutronique mesuré (Fig. 1.2) présente une double oscillation dont l'échelle de temps totale est d'environ 200 ms. Nous y distinguons tout d'abord une chute brutale de la réactivité pendant les premières 50 ms, puis une remontée en deux temps avec un dépassement de la réactivité nominale et enfin une nouvelle chute de la réactivité après l'insertion des barres de contrôle. Cette forme du signal neutronique s'est reproduite quasiment à l'identique pour les trois chambres neutroniques et pour les quatre AURN.

Un scénario, en accord complet avec les observations faites n'a pas encore été validé, mais l'insertion de réactivité négative semble bien être engendrée par un dégerbage mécanique du cœur (ouverture radiale), phénomène le plus probable et compatible avec les échelles de temps données par le signal neutronique.

Récemment, l'intérêt s'est porté sur le scénario initiateur dit « DAC » (Dispositif d'Assemblage



(a) *Le réacteur Phénix*



(b) *Le projet Astrid*

FIGURE 1.1 – Schéma de deux des réacteurs à neutrons rapides refroidis au sodium conçus en France

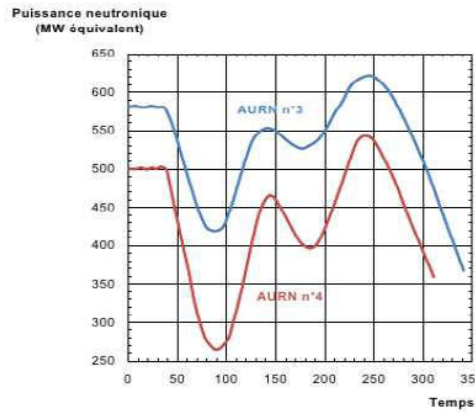


FIGURE 1.2 – Signaux de puissance neutronique enregistrés lors de l'AURN n.3 et n.4

Cobalt), proposé à l'origine par Guidez et al. [24]. Ce scénario est basé sur la coïncidence des quatre AURNs avec la présence de l'assemblage expérimental DAC dans le cœur, en périphérie de sa zone fertile, au-delà de la cinquième couronne. Cet assemblage contenait de l'hydru de calcium utilisé comme modérateur pour le flux de neutrons afin de produire du cobalt radioactif à des fins médicales. Les assemblages fertiles près des DACs ont donc été partiellement exposés à un flux de neutrons modérés et des réactions de fission se sont produites fournissant une puissance thermique supplémentaire, principalement pour les assemblages fertiles ayant un burn-up élevé et donc plus riches en matières fissiles. Malgré cela, les conditions d'ébullition n'ont pas été atteintes dans les assemblages fertiles. Seule une perturbation de température a pu s'établir au voisinage des assemblages DAC [29].

Cependant, une nouvelle analyse des assemblages DAC (2010) suggère que la conception thermo-hydraulique initiale de l'assemblage n'était pas tout-à-fait conforme aux spécifications [35]. Ce fut probablement la cause d'une puissance thermique plus élevée dans l'assemblage DAC, pouvant conduire à un possible bouchage du canal par déformation excessive et ainsi à la formation

d'une zone de sodium liquide stagnant qui, jointe à la condition de sodium dégazé de son Argon (sodium pur), est la condition nécessaire à une surchauffe. Le retour à l'équilibre a pu alors se faire violemment par une vaporisation brutale de la zone surchauffée et donc libérer une grande quantité d'énergie.

Deux cas sont possibles suivant l'endroit où la vaporisation brutale se produit. Si elle se produit à la sortie de l'assemblage DAC, dans le collecteur chaud, l'expansion de la bulle puis son implosion peuvent entraîner une modification de la géométrie du cœur. Ce scénario a été étudié en 2010 et les contraintes mécaniques sur le cœur ont été estimées en couplant le modèle thermique-hydraulique avec le modèle « Cast3M up $\phi$  » [3]. D'après l'analyse IFS, les conditions de gerbage du cœur capables de provoquer un AURN peuvent difficilement être atteintes si la vaporisation brutale du sodium surchauffé se produit dans le collecteur chaud.

Si la vaporisation brutale se produit au sein du DAC lui-même, un bouchon de vapeur de sodium à haute pression (pression de saturation de la vapeur à la température de surchauffe) se forme et chasse brutalement une quantité de sodium liquide dans l'inter-assemblage et pourrait conduire à des modifications géométriques du cœur. Ce scénario a été étudié en 2011 [36] mais s'est basé sur une sous-estimation de la recondensation de la vapeur dans la phase d'expansion et la modélisation s'est trouvée limitée par une mauvaise description physique de l'interface entre la vapeur et le liquide froid. Pour améliorer la modélisation du scénario DAC, une thèse a été entreprise [42] afin d'identifier et de quantifier les instabilités hydrodynamiques.

## Objectifs de la thèse

Notre objectif est d'améliorer la compréhension du comportement du cœur RNR-Na lors de phénomènes vibratoires. Nous sommes donc intéressés par l'étude des mécanismes de transfert d'énergie entre le fluide et les assemblages voisins lors d'un gerbage ou d'un séisme.

Pour ce faire, trois approches ont été suivies : élaboration de solutions analytiques, développement de modèles numériques et réalisation d'expériences.

D'abord, nous cherchons à identifier les régimes d'écoulement qui s'établissent dans les faibles inter-assemblages, sur les échelles de temps qui caractérisent les signaux d'oscillation des AURNs et pour des temps plus longs, typiques des séismes. Ceci doit nous permettre de définir le système d'équations (Navier-Stokes, Euler ou Euler linéarisées) qui décrit le mieux l'écoulement pour différentes échelles de temps et d'identifier les paramètres qui l'influencent.

Pour la première fois, grâce à cette étude, des modèles analytiques dans le cas d'oscillations libres ont obtenus fournissant des solutions du champ de vitesse et pression ; nous avons aussi amélioré les solutions analytiques pour les mouvements imposés.

Afin de progresser sur la compréhension des problèmes d'IFS en fort confinement, nous avons conçu et dimensionné deux maquettes à échelle réduite, composées respectivement par un assemblage hexagonal (PISE-1a) et deux couronnes d'assemblages (PISE-2c). La première a été exploitée pour tester les caractéristiques dynamiques de l'assemblage et la deuxième sera utilisée pour comprendre le comportement dynamique d'un ensemble d'assemblages. Les assemblages étant transparents, il sera possible de visualiser l'écoulement dans les jeux.

Les résultats expérimentaux et les solutions analytiques ont servi de soutien à la validation du modèle numérique « Cast3M Navier-Stokes » que nous avons développé . Ce modèle se base sur

le couplage des équations de la mécanique des fluides et de la mécanique du solide, les deux résolues avec le code Cast3M [7].

## Première partie

# Position du problème et analyse phénoménologique



## Position du problème et état de l'art

Dans ce Chapitre, nous présentons les différentes équations et les hypothèses adaptées à résoudre les problèmes d'IFS pour des configurations géométriques confinées. Ensuite, nous proposons une analyse bibliographique.

### 2.1 Position du problème

Le cœur d'un réacteur RNR-Na est constitué d'assemblages hexagonaux espacés de 3 mm les uns des autres. Pour comprendre les notions de base l'interaction fluide-assemblage, dans un premier temps les travaux se sont basés sur l'étude d'un seul assemblage placé dans un espace confiné pour prendre en compte la présence des assemblages voisins. Souvent, pour obtenir une solution analytique, la section de l'assemblage passe de l'hexagone au cercle (Fig. 2.1). Ensuite, l'étude de plusieurs assemblages peut être réalisée. Dans cette partie, nous présentons les différentes

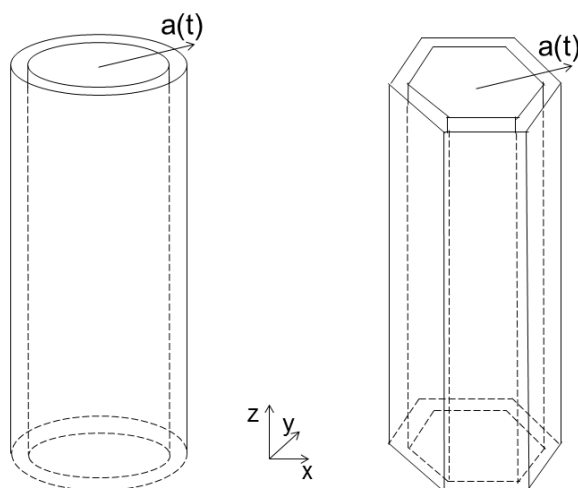


FIGURE 2.1 – Exemple de configurations simplifiées pour l'étude d'IFS : deux cylindres ou hexagones concentriques

équations et les hypothèses adaptées à la résolution des problèmes d'IFS.

Ensuite, nous décrivons les travaux disponibles dans la littérature scientifique.



### 2.1.1 Équations et conditions aux frontières

Dans cette partie, nous présentons les différents équations qui peuvent décrire le déplacement d'un solide vibrant et le mouvement du fluide qui l'entourne.

#### 2.1.1.1 Équations pour le fluide

L'écoulement est gouverné par l'équation de conservation de la masse et le bilan de quantité de mouvement. La première est exprimée par l'équation :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot (\vec{u}) = 0$$

Pour le bilan de quantité de mouvement, nous avons plusieurs possibilités selon les propriétés du fluide et de l'écoulement. Les équations d'Euler linéarisées (Eq. 2.1) sont adaptées à l'étude d'un écoulement très confiné, sous l'hypothèse de petites amplitudes d'oscillation et d'un grand nombre de Strouhal. Dans ce cas, aucun effet de la dissipation dans le fluide ne peut apparaître tandis que les effets inertiels sont sensibles.

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p \quad (2.1)$$

Le terme convectif est retenu dans les équations d'Euler (Eq. 2.2) pour un écoulement très confiné et de grandes amplitudes d'oscillation. Ce terme peut introduire un déphasage entre la force imposée par le fluide sur la structure et la vitesse du solide.

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\rho \vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\vec{\nabla} p \quad (2.2)$$

Les effets dissipatifs sont pris en compte par le terme visqueux des équations de Navier-Stokes linéarisées (ou équations de Stokes). Elles sont adaptées à la représentation d'un écoulement de fluide visqueux induit par de faibles mouvements de la structure (Eq. 2.3). De la même manière que pour les équations d'Euler, nous pouvons manipuler l'expression de la force fluide afin de repérer deux termes, un en quadrature avec l'autre. La différence est que, dans les équations d'Euler l'amortissement dépend du terme convectif, tandis que, dans les équations de Stokes, il dépend de la viscosité.

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p + \mu \nabla \cdot (\nabla \vec{u}) \quad (2.3)$$

Pour l'écoulement d'un fluide visqueux et de grands déplacements de la structure, nous devons utiliser les équations de Navier-Stokes complètes (Eq. 2.4).

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\vec{\nabla} p + \mu \nabla \cdot (\nabla \vec{u}) \quad (2.4)$$

Lorsque le frottement visqueux a complètement diffusé, le terme d'inertie devient négligeable. L'écoulement est alors décrit par les équations de Navier-Stokes stationnaires (Eq. 2.5) :

$$\rho (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\vec{\nabla} p + \mu \nabla \cdot (\nabla \vec{u}) \quad (2.5)$$

### 2.1.1.2 Équations de la dynamique du corps rigide

L'oscillation du solide est décrite par l'équation de la dynamique d'un corps rigide. La structure est indéformable et elle a un seul degré de liberté : elle est censée à se déplacer d'un mouvement de translation horizontal dans le domaine fluide. Supposons que  $m_s$  soit sa masse,  $c_s$  son coefficient d'amortissement et  $k_s$  sa constante de rigidité. Soit  $\vec{a}$  le déplacement de la structure, alors l'équation de la dynamique est :

$$m_s \ddot{\vec{a}} + c_s \dot{\vec{a}} + k_s \vec{a} = \vec{F}_f \quad (2.6)$$

où  $\vec{F}_f$  est l'effort imposé par le fluide sur la structure.

### 2.1.1.3 Conditions aux frontières : couplage fluide-structure

Les conditions aux frontières déterminent le couplage fluide-structure. Nous pouvons distinguer deux types des conditions aux frontières : non-pénétration ou adhérence. La première doit être respectée dans tous le cas, tandis que la deuxième n'est considérée que pour un fluide visqueux.

$$\begin{cases} \dot{\vec{a}} \cdot \hat{n} = \vec{u} \cdot \hat{n} & \text{sur } \Gamma_s \text{ et } \Gamma_{ext} & \text{condition de non-pénétration} \\ \dot{\vec{a}} = \vec{u} & \text{sur } \Gamma_s \text{ et } \Gamma_{ext} & \text{condition d'adhérence} \end{cases}$$

où  $\Gamma_s$  et  $\Gamma_{ext}$  sont respectivement la surface de la structure mobile et la surface de la structure fixe. En plus, nous définissons l'effort appliqué par le fluide sur la structure dans la direction  $i$  comme :

$$F_{f,i} = \int_{\Gamma_s} [-p\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}] \cdot \hat{n}_j d\Gamma_s$$

où  $\hat{n}_j$  est la normale sortante de la surface du solide et  $D_{ij}$  est le tenseur des taux de déformation dépendant de la vitesse du fluide :

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Cette expression de la force fluide est insérée dans l'équation de la dynamique du corps rigide.

### 2.1.1.4 Approximations

Afin de résoudre les équations couplées du fluide et de la structure, différentes hypothèses peuvent être utilisées. Nous listons les différentes approximations dont nous nous servirons pour décrire les modèles analytiques ou numériques dans la suite.

- **Approximations physiques**

Dans tout le texte, le fluide a des propriétés physiques constantes : masse volumique  $\rho$  et viscosité dynamique  $\mu$ . Au début le fluide est toujours au repos et la gravité ne joue aucun rôle : la pression du fluide est donc composée par la pression statique et par la composante liée à la poussée d'Archimède. Les effets thermiques sont négligés (écoulement isotherme). Le solide est considéré comme un corps rigide.

- **Approximations géométriques**

Les solutions analytiques du champ de vitesse et de pression autour d'un solide vibrant

s’obtiennent le plus souvent pour une géométrie bidimensionnelle. Il faut considérer deux solides concentriques de longueur infinie, dont le solide interne oscille dans le plan transversal et le solide externe est fixe. Il s’agit de résoudre les équations pour le fluide et le solide dans une section suffisamment éloignée des extrémités pour pouvoir négliger les « effets des bouts » et admettre l’approximation plane.

Dans le cas où l’épaisseur de l’anneau fluide est faible par rapport aux dimensions du solide, nous utilisons l’approximation du plan tangent : la surface fluide peut être représentée comme une couronne cylindrique dépliée.

- **Approximation cinématique**

Pour des faibles amplitudes de vibration par rapport au jeu fluide, il est possible considérer la frontière mobile  $\Gamma_s$  encore non déplacée (transfert ou aplatissement des conditions aux frontières).

- **Approximations dynamiques**

Le fluide peut être considéré comme visqueux ou non-visqueux. Dans ce dernier cas, nous utilisons les équations d’Euler (linéaires ou non-linéaires) ; dans tous les autres cas, les équations de Stokes ou de Navier-Stokes sont nécessaires.

Le solide peut avoir un comportement dissipatif ou non-dissipatif selon que la valeur du coefficient d’amortissement  $c_s$ .

## 2.2 État de l’art

Cette section est divisée en quatre parties : chaque partie rassemble les travaux des auteurs selon le type d’équations utilisées pour l’étude de l’écoulement (Euler linéarisées, Euler, Navier-Stokes linéarisées, Navier-Stokes). Nous décrivons les méthodes analytiques et numériques qui font référence dans le domaine de l’interaction fluide-structure pour les géométries cylindrique et hexagonale et pour un ou plusieurs solides vibrants.

### 2.2.1 Équations d’Euler linéarisées

#### 2.2.1.1 Méthodes analytiques

Fritz [20] présente le cas de deux cylindres concentriques qui se déplacent à des vitesses différentes (Fig.2.2). Le mouvement des deux cylindres est imposé par une force extérieure sinusoïdale de pulsation  $\omega$ . L’hypothèse de petites amplitudes d’oscillation est utilisée. Le champ de vitesse étant initialement irrotationnel, l’existence d’un potentiel des vitesses est garantie par le théorème de Lagrange [22].

L’expression de la force fluide est obtenue par le formalisme hamiltonien [34] appliqué à l’énergie cinétique du fluide  $E_{cf}$  :

$$F_{fi} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial E_{cf}}{\partial \dot{a}_i} + \frac{\partial E_{cf}}{\partial a_i} \approx -\frac{d}{dt} \frac{\partial E_{cf}}{\partial \dot{a}_i}$$

où  $a_i$  est le déplacement du  $i$ -ème cylindre ( $i = 1; 2$ ).

Dans le cas où seul le cylindre interne se déplace ( $i = 1$ ), Fritz donne une définition de type énergétique de la masse ajoutée (Eq. 2.7) : c’est la masse qu’il faut ajouter à la masse du solide

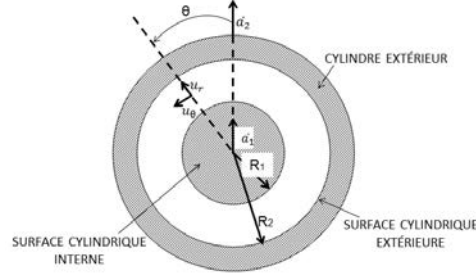


FIGURE 2.2 – Deux cylindres concentriques mobiles, séparés par un anneau fluide [20]

pour que son énergie cinétique soit égale à celle du système complet (fluide et solide).

$$M_{add} = \frac{2E_{cf}}{\dot{a}_1}$$

Des valeurs de la masse ajoutée pour des solides de différentes géométries qui vibrent en milieu semi-infini sont données dans l'article. Notamment, pour deux cylindres concentriques, dont le cylindre interne est fixe, la  $M_{add}$  est :

$$M_{add} = \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \rho \pi R_1^2$$

Afin de prendre en compte la dissipation du fluide, Fritz ajoute de façon empirique la perte de pression par frottement, calculée par le facteur de Darcy  $f_{fric}$ . Il déduit, donc, un paramètre d'amortissement  $\beta$ , rapport entre la force de frottement et la force d'inertie. Ce paramètre d'amortissement est défini pour un écoulement à la fois turbulent et laminaire :

$$\beta = \begin{cases} \frac{f_{fric} a_0}{3\pi b} & \text{écoulement turbulent} \\ \frac{6\nu}{\omega b^2} & \text{écoulement laminaire} \end{cases}$$

La comparaison de la solution analytique et des résultats expérimentaux montre un écart de 25%-35%. En effet, les conditions analytiques (écoulement bidimensionnel et fluide non-visqueux) ne sont pas bien respectées dans la maquette. Les essais ont été effectués avec des fluides visqueux, comme le glycérol ou l'huile. Pour ces fluides, la viscosité est assez importantes. Donc, l'hypothèse d'un écoulement non-visqueux ne semble pas être adaptée. En plus, les tests ont été réalisés pour des jeux entre 4 mm et 10 mm à des faibles fréquences de vibration. Comme nous montreront dans le Chapitre 3.1, dans ces conditions, les effets visqueux ne sont pas négligeables.

### 2.2.1.2 Méthodes numériques

Dans les années 1980, d'une part Shinohara [43] et d'autre part Fujita [21], développent des méthodes numériques pour analyser la réponse sismique d'un ensemble d'assemblages hexagonaux très fortement confinés.

Leurs modèles sont basés sur la résolution des équations d'Euler linéarisées bidimensionnelles par la méthode des différences finies. Shinohara, qui traite d'un grand nombre d'assemblages,

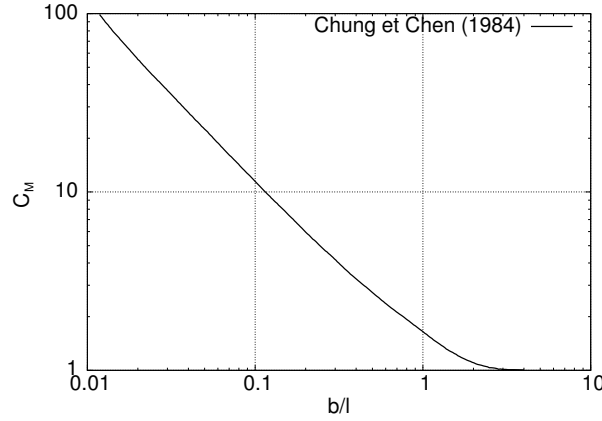


FIGURE 2.3 – Coefficient de masse ajoutée pour deux hexagones concentriques [9]

utilise un modèle homogénéisé.

Le modèle numérique de Fujita [21] est comparé à des expériences à plusieurs assemblages. Il montre que la réponse en fréquence d'un cœur d'un réacteur RNR-Na peut être bien représentée par un modèle numérique représentant un nombre réduit d'assemblages : il est suffisant que les conditions aux frontières sont respectées.

Dans le travail de Chung et Chen [9], la masse ajoutée pour différentes configurations confinées est donnée par un modèle aux éléments finis et un écoulement potentiel. L'évolution du coefficient de la masse ajoutée pour deux hexagones concentriques est reporté en fonction du rapport entre le jeu  $b$  et le côté de l'hexagone en Fig. 2.3. Plus récemment, Morand et Ohayon [31] ont proposé un modèle numérique pour étudier un faisceau de tubes immergés dans un fluide légèrement compressible, soumis à des oscillations séismiques ou des chocs. Le mouvement du fluide est régi par les équations d'Euler linéarisées. Aux parois, la condition de glissement est imposée. La structure, de masse  $m_s$  et de raideur  $k_s$ , est représentée par l'équation de la dynamique sans le terme d'amortissement. Le système d'équations est alors celui de l'équation 2.7 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c^2} \ddot{p} = \nabla^2 p + \rho \frac{\partial q}{\partial t} \\ m \ddot{\vec{a}} + k \vec{a} = \vec{F}_f + \vec{F}_{ext} \\ \vec{F}_f = - \int_{\Gamma_s} p \hat{n} \, d\Gamma_s \cdot \hat{e}_X \\ \left. \vec{a} \cdot \hat{n} \right|_{\Gamma_s} = \left. \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot \hat{n} \right|_{\Gamma_s} \end{array} \right. \quad (2.7)$$

où  $\Gamma_s$  est la surface mobile du solide. Ensuite, le système est discrétisé par une méthode aux éléments finis et une formulation variationnelle [23]. Cette discrétisation conduit à la définition d'un opérateur de couplage fluide/structure  $R$ , lié à la condition de glissement à l'interface solide/fluide. Le système est alors mis sous forme matricielle. Néanmoins, il est non-symétrique. Afin de le rendre symétrique, la variable  $\Phi$  est ajoutée, représentant le champ du potentiel de déplacement du fluide. Les équations sont détaillées en Chapitre 4.

Pour des systèmes à géométrie répétitive, comme un cœur de réacteur nucléaire, la méthode d'homogénéisation peut être utilisée (p.e. [12], [13], [2], [5], [44]).

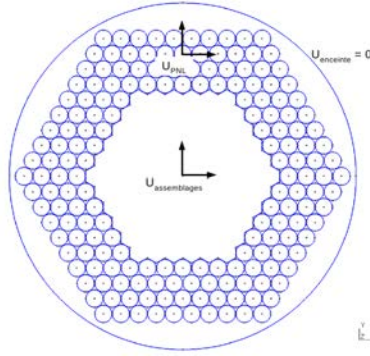


FIGURE 2.4 – Schéma du plan transversal de la maquette Symphony [32]

Cette méthode permet de modéliser le faisceau de tubes et le fluide comme un milieu continu équivalent où toutes les grandeurs sont moyennées sur des cellules élémentaires. De plus, les accélérations du fluide et des tubes sont supposées varier faiblement d'une cellule à l'autre. Ces hypothèses, appelées condition de répétitivité, sont valides lorsque le fluide est initialement au repos et que les amplitudes de vibrations sont faibles. Dans les cas où ces conditions ne sont pas respectées, des effets dissipatifs peuvent se produire. Pour les prendre en compte, il est possible d'introduire dans la méthode un amortissement forfaitaire de type Rayleigh.

Néanmoins, dans les cas où les tubes sont très proches (très fort confinement), des effets inertiels importants se produisent. Ces effets peuvent conduire à une forte différence d'accélération entre deux tubes voisins, modifiant la réponse du fluide et l'effort sur les tubes. Pour ces cas, la méthode d'homogénéisation est encore à valider.

## 2.2.2 Écoulement non-visqueux et non-linéaire : équations d'Euler

### 2.2.2.1 Méthodes numériques

Les équations d'Euler sont utilisées par Moussou [32] pour simuler, avec le Code\_Aster, l'écoulement dans le plan transversale de l'eau dans les Protections Neutroniques Latérales (PNL) et dans les assemblages hexagonaux (Fig. 2.4) lors des essais sismiques SYMPHONY [3]. Par hypothèse, les assemblages de combustible se déplacent en bloc. À différence des travaux précédents, Moussou ne néglige pas le terme convectif dans les équation d'Euler. Ensuite, il estime que l'échelle de temps de la turbulence est supérieure d'environ deux ordres de grandeur à l'échelle de temps de vibration des structures. Donc, la turbulence n'est pas prise en compte. Dans son modèle, le terme de dissipation est estimé en considérant le facteur  $f_{fric}$ .

Il montre que le terme convectif (ou de pression dynamique) n'est pas négligeable dans les cas des grandes amplitudes d'oscillations des PNL, puisque il peut être deux ordres de grandeur plus élevé que le terme de dissipation ou le terme de masse ajoutée. Néanmoins, ce modèle n'est pas capable de reproduire les tourbillons liés au grand déplacement des PNL par rapport au fluide ; en plus, les calculs laissent apparaître dans le champ de vitesse des singularités aux arêtes dépourvues de sens physique, car elles résultent de l'approximation de fluide parfait. Pour cela, il conclut que les équations d'Euler ne sont pas adaptées à représenter l'écoulement du fluide et que des études complémentaires sont nécessaire pour prendre en compte la turbulence.

Pour simuler numériquement le gerbage du cœur de Phénix et fournir des éléments compa-

ratifs pour le modèle homogénéisé [3], Cardolaccia [6] modélise avec le code EUROPLEXUS, en 3D, deux couronnes d'assemblages hexagonaux, immergés dans une cuve. L'écoulement de fluide est décrit par les équations d'Euler. Le problème décrit est de nature incompressible, alors que ce code est utilisé d'habitude pour modéliser des phénomènes de nature compressible. Cela porte à des problèmes de stabilité numérique et une surestimation de la pression à l'interface solide/fluide. Donc, les résultats obtenus sont exploitables seulement sur les premières 20 ms. Cependant, de nombreux calculs ont été effectués, notamment pour simuler le scénario « DAC » et le gerbage. Pour obtenir des déplacements de quelques millimètres pour la première couronne, il est nécessaire que le fluide ne sorte que des orifices latéraux en tête de l'assemblage. Pour reproduire un déplacement de 1 mm en 20 ms, où le calcul d'IFS est correct, la pression initiale de détente de la bulle doit être 100 bar. Alors, Cardolaccia suppose que, pour la durée de 200 ms des AURN, la pression de la détente de la bulle est plus faible et donc, incapable de produire une gerbage. Néanmoins, un travail très récent [42], montre que, grâce à des phénomènes d'instabilité, à basse pression, le gerbage peut se produire.

## 2.2.3 Écoulement visqueux et linéaire : équations de Navier-Stokes linéarisées

### 2.2.3.1 Méthodes analytiques

Chen résout les équations de Stokes [8]. Le cylindre interne, de diamètre  $R_1$ , est animé d'une vitesse sinusoïdale, horizontale, de pulsation  $\omega$  imposée ; à la différence de Fritz [20], le cylindre externe est fixe. Nous faisons référence à la Figure 2.2, où  $\dot{a}_2$  est nulle. L'amplitude de vibration  $a(t) = a_0 \sin(\omega t)$  est supposée faible par rapport à l'épaisseur de l'anneau fluide.

Cette hypothèse permet de modéliser l'écoulement avec les équations de Navier-Stokes linéarisées (ou équations de Stokes) où le terme de convection inertielle est négligé.

Des expressions analytiques de la vitesse et de la pression du fluide valables pour toutes les valeurs du jeu sont fournies. Par rapport au travail de Fritz, Chen décompose la force fluide  $F_f$  en deux parties : la première partie en phase avec l'accélération, liée au coefficient de masse ajoutée  $C_M$ , et la deuxième partie, liée au coefficient d'amortissement ajouté  $C_D$ , qui s'oppose au mouvement (Eq. 2.8) :

$$F_f = \rho_f \pi R_1^2 U \omega [C_M \sin(\omega t) + C_D \cos(\omega t)] \quad (2.8)$$

Les deux coefficients trouvés sont proportionnels au nombre de Stokes  $\sigma$ , qui est composé de la pulsation de vibration, du rayon du cylindre interne et de l'inverse de la viscosité  $\nu$ . En revanche, ils ne dépendent pas de l'amplitude d'oscillation. Les évolutions des coefficients de masse et d'amortissement ajoutés en fonction du confinement montrent que, pour les cas très confinés, les effets inertiels du fluide et les effets dissipatifs sont très importants. Ensuite, des données expérimentales sont présentées : le montage expérimental est composé de deux cylindres concentriques, le cylindre interne étant excité à une fréquence imposée. La fréquence propre de vibration du cylindre est mesurée en air et dans un fluide dense comme l'eau ou l'huile. Chen suppose que la vibration du cylindre pendant les tests est du type poutre encastree-libre et il donne l'expression du coefficient de masse ajoutée (Éq. 2.9) et du taux d'amortissement. Ce

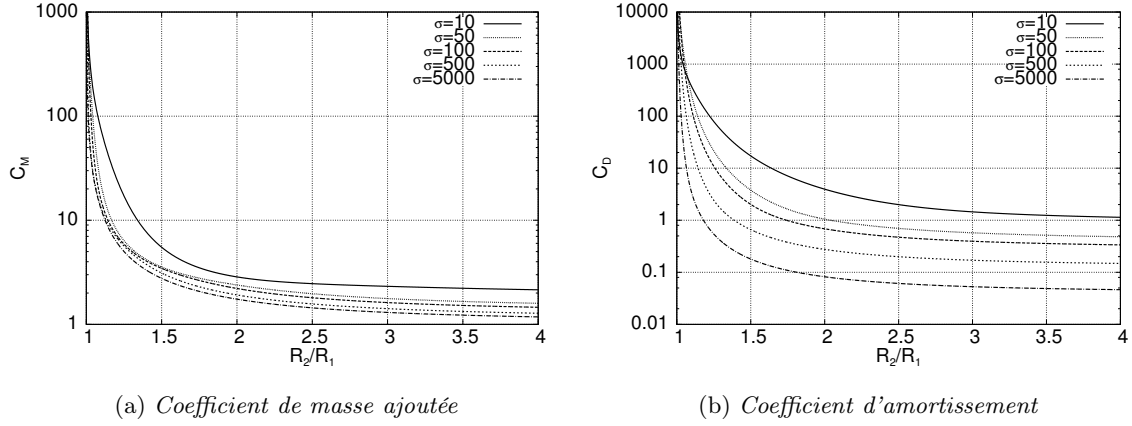


FIGURE 2.5 – Coefficients de masse et d’amortissement ajoutés déduits par la solution analytique de Chen

dernier est obtenu par la méthode de la largeur à mi-hauteur sur le spectre des fréquences.

$$C_M = \frac{m_s}{\rho\pi R_1^2} \left[ \left( \frac{f_{air}}{f_{eau}} \right)^2 - 1 \right] \quad (2.9)$$

Les résultats sont en bon accord avec la solution analytique.

Sur la base du travail de Chen, Mulcahy [33] étend la solution analytique à un problème tridimensionnel. Il introduit donc le rapport entre l’épaisseur de la couche limite et celui du jeu ( $\delta_\nu/b$ ), qui est de l’ordre de l’unité et suppose un écoulement du type Poiseuille dans l’espace annulaire. L’expression analytique de la force fluide  $F_f$  par unité de longueur dans la direction du déplacement  $x$  résulte de l’intégrale du seul terme de pression sur la surface du cylindre interne ; la contrainte visqueuse est négligée. La force est décomposée en deux parties comme dans le travail de Chen et elle est une fonction de la coordonnée verticale, des coefficients de masse et d’amortissement ajoutés, de  $\delta_\nu/b$  et des paramètres géométriques du cylindre interne. En plus, il montre comment la force fluide moyenne par unité de longueur dépend de la valeur du rayon du cylindre interne et sa longueur  $L$ , selon le paramètre  $\chi$  :

$$\chi = 1 - \frac{R_1}{H} \tanh \left( \frac{H}{R_1} \right) \quad (2.10)$$

L’expression de  $\chi$  nous indique que, pour des cylindres élancés ( $H/R_1 \rightarrow \infty$ ), la force d’amortissement est due à l’écoulement bidimensionnel, alors que pour des cylindres trapus ( $H/R_1 \rightarrow 0$ ), elle est due à l’écoulement axial.

### 2.2.3.2 Méthodes numériques

Yang et Moran [48] proposent une méthode numérique aux éléments finis pour calculer le coefficient de masse et d’amortissement ajoutés dans le même problème que Chen [8].

Ils discrétisent les équations de Stokes, par la méthode de Galerkin. Les variables inconnues, vitesse et pression du fluide, sont décomposées en série de Fourier (méthode spectrale) et le système est mis sous forme matricielle. Le domaine fluide est décomposé en éléments triangulaires et les fonctions test pour la vitesse et la pression sont respectivement d’ordre quadratique et



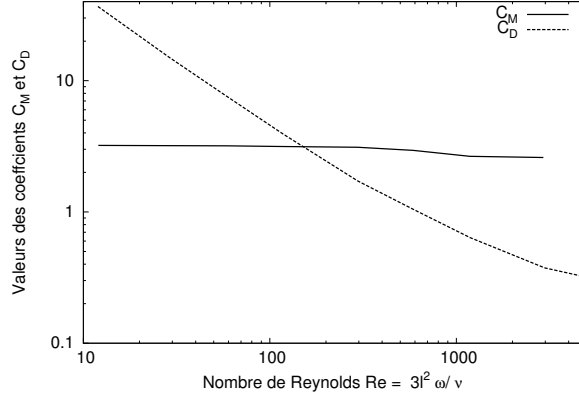


FIGURE 2.6 – Coefficient de masse ajoutée  $C_M$  et d’amortissement ajouté  $C_D$  pour deux hexagones concentriques [49]

linéaire.

La solution est trouvée par la méthode d’interpolation mixte et elle est validée par la solution analytique de Chen.

Le modèle numérique est ensuite appliqué au cas d’une géométrie hexagonale [49]. Bien qu’ils partent d’une géométrie tridimensionnelle, la pesanteur n’agit pas sur l’écoulement, étant contrebalancée par la pression hydrostatique. Le problème, initialement tridimensionnel, est donc ramené à un problème bidimensionnel.

Dans le cas de deux hexagones concentriques, les évolutions des coefficients de masse et d’amortissement ajoutés (Fig. 2.6) sont indiquées en fonction du nombre de Reynolds ( $Re = \omega 3l^2/\nu$ ) et pour un jeu fixé. Elles montrent que les effets dissipatifs varient sensiblement avec le nombre  $Re$ , alors que les effets inertiels sont presque constants. La même remarque est faite par Mulcahy [33] pour la géométrie cylindrique, en retenant l’épaisseur de la couche limite comme paramètre de référence. Ensuite, le modèle de Yang et Moran est appliqué à sept assemblages hexagonaux pour un nombre de Reynolds de 3000. L’évolution du coefficient de la masse ajoutée de l’hexagone central en fonction du jeu est comparée avec la solution obtenue en approximation de fluide parfait. Bien que la masse ajoutée soit sous-estimée par la solution de fluide parfait, elle reste assez représentative pour des jeux faibles.

## 2.2.4 Méthodes pour un écoulement visqueux et non-linéaire : équations de Navier-Stokes complètes

### 2.2.4.1 Méthodes analytiques

Afin de déterminer l’effet des grandes amplitudes d’oscillations sur les coefficients de masse et d’amortissement ajoutés, Wilson [47] propose une solution analytique des équations de Navier-Stokes bidimensionnelles dans l’espace plan entre deux hexagones concentriques (arêtes exclues). L’hexagone interne, le seul mobile, se déplace perpendiculairement à sa propre génératrice avec une fréquence  $\omega$  imposée. Le jeu est très faible et le fluide est visqueux et incompressible,.

Il résout les équations par un développement asymptotique en fonction de la pulsation de vibration  $\omega$ . À l’instar de [33], l’analyse adimensionnelle fait apparaître l’épaisseur de la couche limite. L’analyse phénoménologique porte sur les effets de la fréquence d’oscillation : si  $\omega$  est

élevé, les effets visqueux sont confinés dans une région proche de la paroi ; si  $\omega$  est faible, les effets visqueux sont étendus à tout le jeu. La pression dans le jeu peut alors être assimilée à celle connue en théorie de la lubrification, puisque l'épaisseur du fluide est mince [41]. Au contraire de ce qu'il affirme, la solution du champ de pression et de vitesse, dans les cas de vibrations à basse fréquence, ne représente pas l'écoulement dans l'inter-assemblage d'un réacteur à neutrons rapides. Bien que la fréquence de vibration d'un assemblage soit basse, l'inter-assemblage est d'un ordre de grandeur plus grand que celui considéré. Par ailleurs, il propose un profil de vitesse dans le jeu du type Poiseuille oscillatoire. Plus loin, nous montrons que ce type d'écoulement est typique d'inter-assemblages au-dessous de 1.5 mm (voir le Chapitre 3.3). L'expression analytique des coefficients de masse et d'amortissement ajoutés a été comparée avec la solution numérique de Fujita [21], trouvant un écart du 30%.

#### 2.2.4.2 Méthodes numériques

Huerta et Liu [25] modélisent l'écoulement de fluide par la formulation Arbitraire Lagrangienne Eulérienne (ALE) des équations de Navier-Stokes couplées avec les équations de la dynamique des structures. La vitesse de grille  $w_g$  est définie égale à la vitesse du solide pour tous les nœuds du maillage qui ont une certaine distance arbitraire du solide vibrant ; dépassée cette distance, la vitesse  $w_g$  est nulle. Résoudre les équations permet de définir la force fluide décomposée comme dans [8] et développée en série de Fourier. Cette série est une combinaison linéaire de l'accélération et de la vitesse du solide, dont seulement les deux premiers termes sont non-nuls. Ceux-ci sont exactement les coefficients de masse et d'amortissement ajoutés. La valeur de la masse ajoutée est comparée avec les résultats de [20] et sont en bon accord.

Plus récemment, la formulation ALE a été comparée à un modèle à transpiration dans les travaux de Morais et al. [16], pour déterminer la force fluide exercée sur un faisceau de tubes (ou un seul tube [17]) sans ou avec écoulement initial. Les équations de Navier-Stokes sont résolues en couplage avec l'équation de la dynamique. La méthode de transpiration s'appuie sur le développement au premier ordre de la vitesse de l'interface fluide-solide, ce qui permet d'utiliser un maillage fixe dans le temps. En effet, si cette interface est assez régulière, le gradient de vitesse du maillage peut être approché par le gradient du champ de vitesse stationnaire en configuration non-déformée. Cette hypothèse implique que le profil de vitesse permanent soit sensiblement linéaire dans la zone de déplacement. Puisque le profil de vitesse est linéaire seulement dans l'épaisseur de la couche limite tout près de la paroi, l'amplitude d'oscillation ne doit pas dépasser cette épaisseur. Les systèmes couplés avec la formulation ALE et celle de transpiration sont comparées aux résultats expérimentaux. Dans les cas de faible amplitude d'oscillation, la méthode de transpiration permet de retrouver les résultats expérimentaux et se trouve en bon accord avec la formulation ALE.

#### 2.2.5 Présentation des essais

Dans les années '90, des études expérimentales sur les cœurs de réacteurs RNR-Na ont été réalisées par le laboratoire d'études sismiques EMSI au CEA-Saclay (e.g. [3]). En premier lieu, ils ont considéré un seul assemblage de combustible (AC) et un seul assemblage de protection neutronique latérale (PNL) à l'échelle réelle du réacteur Phénix, afin de construire un modèle

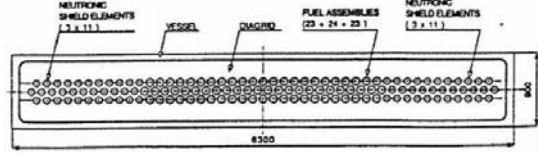


FIGURE 2.7 – Schéma de trois rangées lors des essais Symphony [3]

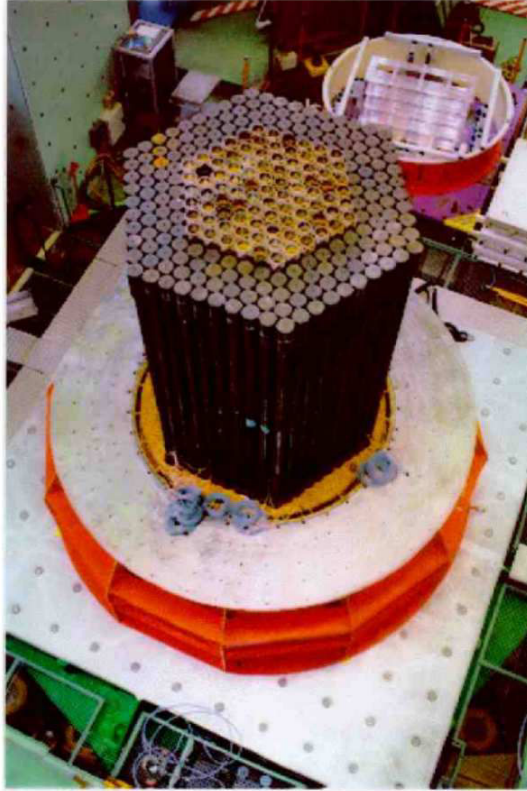


FIGURE 2.8 – La maquette SYMPHONY en configuration hexagonale [3]

élémentaire du comportement en vibration. Ensuite, ils ont assemblé une et trois rangées d'assemblages (Fig. 2.7). Chaque rangée était composée dans sa partie centrale par des AC et aux extrémités par des PNL, afin de comprendre l'interaction et les contacts entre les structures au niveau des plaquettes. Puis, il a été construit une maquette constituée de 5 couronnes d'AC et de 4 couronnes de PNL (Fig. 2.8). La confrontation entre la configuration du cœur, dite hexagonale, et la configuration à trois rangées permet de tester la validité des modèles de base, qui réduisent le comportement du cœur à celui de la rangée centrale dans les essais à trois rangées.

Les premiers essais, nommés SYMPHONY, ont procédé à une excitation sismique connue en air et en eau. Les fréquences propres en air d'un AC et d'un assemblage PNL ont été mesurées à 3 Hz avec un amortissement respectivement de 15% pour les AC et de 40-80% pour le PNL. Dans la configuration à une rangée et trois rangées, les déplacements en tête des AC sont supérieurs à ceux des PNL et le déplacement des AC au centre d'une rangée n'est pas influencé par la présence des PNL. Le coefficient d'amortissement des PNL est, en effet, plus élevé que celui des AC. L'amplitude d'oscillation est plus importante en eau qu'en air.

Pour la configuration hexagonale en air, le comportement des AC et des PNL est le même

que dans les trois rangées. En revanche, dans cette configuration en eau, les AC et les PNL ont des déplacements similaires et faibles. Le comportement des assemblages est différent de celui dans la configuration en rangées. Ceci est dû au fait que les assemblages sont plus confinés en configuration hexagonale que disposés en ligne. Ce confinement implique un couplage élevé entre les structures et le fluide. En effet, les déplacements des AC dans la configuration hexagonale sont plus faibles que dans la configuration à rangées. La diminution de l'amplitude d'oscillation pour les AC est due aux effets de couplage fluide-structure.

À la lumière de ces essais, il n'est pas possible d'assimiler le comportement des assemblages d'un cœur d'un réacteur RNR-Na à celui des assemblages disposés en configuration de rangées. D'autres essais, typiquement ceux sous excitation de type « bruit blanc », amènent aux mêmes considérations.

Les déplacements obtenus expérimentalement lors d'une excitation sismique imposée ont été comparés à ceux obtenus avec le modèle homogénéisé 3D [44]. Les résultats sont en bon accord.

Un autre programme expérimental basé sur des essais d'injection du fluide, dénommé RAP-SODIE [3], s'est déroulé dans les années '90 pour étudier le comportement du cœur de Phénix lors des AURNs. Le montage expérimental consistait en la reproduction de 5 couronnes d'assemblages combustibles (AC) et de 4 couronnes d'assemblages PNL à l'échelle 1 : 3 de Superphénix. L'assemblage central est percé de trois orifices à différentes hauteurs pour permettre l'injection d'eau. Trois différentes pression du réservoir ont été prévues (5,10,14 bar). Pour chaque essai la pression du réservoir restait quasiment constante. Le volume d'eau injecté variait entre 0.5 et 5 l.

Ici, nous ne reportons que l'essai à une pression de réservoir de 14 bar, pour un volume d'eau injecté de 5 l dans un temps d'environ de 300 ms.

Dans l'enregistrement du déplacement des 5 couronnes d'AC, le mouvement d'ouverture des assemblages est de type radial. Les assemblages de la même couronne ont des déplacements très proches avec le même temps d'ouverture. Néanmoins, le mouvement de la première couronne peut être décomposé en deux parties : la première se déroule en 40 ms et la deuxième dans les 120 ms suivantes. Ceci implique une première ouverture du cœur dans un temps très court.

Une interprétation effectuée avec le modèle homogénéisé 3D a montré que pour des temps d'injection de 300 ms, les assemblages se déplacent selon le premier mode de vibration. En revanche, pour des temps d'injection courts, d'autres modes à fréquence plus élevée, donc des temps d'ouverture très rapide, sont sollicités.

Plus récemment, des expériences avec une couronne d'assemblages hexagonaux placés dans une cuve cylindrique ont été réalisées par Koo et al. pour comprendre la réponse d'un cœur RNR-Na à des séismes qui se sont produits dans le passé [28]. Chaque assemblage est constitué d'un cylindre à base hexagonale en acier, encastré dans le sommier par une barre cylindrique. La réponse en déplacement au séisme est donnée par le cas d'un seul hexagone, 3 hexagones en ligne et 7 hexagones en configuration de couronne. L'amplitude d'oscillation maxima s'observe en tête de l'assemblage pour tous les trois configurations : ceci confirme que les assemblages vibrent selon le premier mode. Des impacts en tête se produisent tout au début des oscillations. En augmentant le nombre d'assemblages, la fréquence de l'assemblage central chute. En fait, l'espace inter-assemblage de 2 mm entre les structures, augmente le couplage fluide-structure.

Un montage expérimental encore plus simple a été proposé par Daogang et al. [11] : il s'agit

de deux cylindres à base hexagonale, dont l'un est mobile et l'autre fixe, disposés parallèlement, à l'horizontale, dans une cuve d'eau. Le cylindre mobile est accroché à deux ressorts qui, au repos, imposent une distance variable de 3 à 20 mm entre les deux cylindres. La fréquence de vibration et les coefficients de masse et d'amortissement ajoutés trouvés expérimentalement sont comparés avec la solution analytique de Wilson [47] et se montrent en bon accord.

# Analyse phénoménologique et solution analytique pour des oscillations libres et forcées

Dans ce chapitre, nous cherchons le modèle le plus adapté à la description de l'écoulement d'un fluide incompressible et visqueux dans une espace très confiné, lors d'oscillations induites par un corps rigide. Les équations de Navier-Stokes sont résolues pour le cas de deux cylindres concentriques de longueur infinie, le cylindre interne étant animé d'une oscillation transversale unidirectionnelle. L'écoulement est donc considéré comme étant bidimensionnel. L'analyse effectuée nous permet d'obtenir une carte d'écoulement (Fig. 3.2), permettant de définir des partitions de l'espace des données qui correspondent à une approximation des équations de Navier-Stokes. Cette carte permet, donc, de montrer que le régime d'écoulement dans le réacteur Phénix peut être représenté correctement par les équations d'Euler complètes ou linéarisées, selon l'amplitude d'oscillation.

Ensuite, nous établissons la solution analytique du champ de vitesse du fluide et du déplacement de la structure pour le cas de vibrations libres et imposées d'un solide dans un fluide incompressible et visqueux initialement au repos en géométrie confinée. Pour la première fois, à notre connaissance, une solution analytique a été trouvée pour des vibrations libres en couplant les équations du fluide et de la structure. Ceci nous semble fondamental pour pouvoir valider les modèles numériques utilisés dans la suite. Les détails du calcul sont reportés dans l'Annexe A et Annexe B.

## 3.1 Analyse phénoménologique

### 3.1.1 Équations de Navier-Stokes adimensionnées

Considérons deux cylindres concentriques de longueur infinie (problème bidimensionnel), de rayons respectifs  $R_1$  et  $R_2$  (Fig. 3.1), dans un milieu fluide à propriétés constantes. L'anneau occupé par le fluide est de dimension  $b = R_2 - R_1$ . Le jeu  $b$  est très petit par rapport au rayon externe  $R_2$  : cette condition est la seule hypothèse restrictive qui est retenue dans cette discussion.

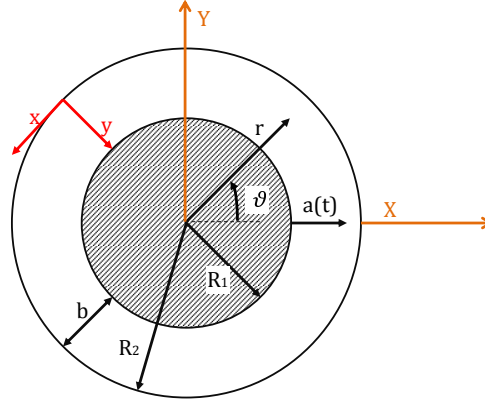


FIGURE 3.1 – Deux cylindres concentriques séparés par un milieu fluide

Le cylindre externe est fixe alors que le cylindre interne est animé d'un mouvement oscillatoire horizontal de déplacement  $a(t)$ .

Les champs de vitesse et de pression de l'écoulement sont notés respectivement :

$$\vec{v}_f = u_r(r, \theta, t)\hat{e}_r + u_\theta(r, \theta, t)\hat{e}_\theta \quad \text{et} \quad P = p_0 + p(r, \theta, t)$$

Le système d'équations qui décrit ce problème est constitué par des équations de Navier-Stokes complètes (bilan de masse et quantité de mouvement) avec condition d'adhérence aux frontières.

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{u}(r, \theta, t) = 0 \\ \frac{\partial \vec{u}(r, \theta, t)}{\partial t} + \vec{u}(r, \theta, t) \nabla \vec{u}(r, \theta, t) = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p(r, \theta, t) + \frac{1}{\nu} \nabla^2 \vec{u}(r, \theta, t) \\ \vec{u}(r, \theta, t) \Big|_{R_1} = \vec{a}(t) \\ \vec{u}(r, \theta, t) \Big|_{R_2} = 0 \\ \vec{u}(r, \theta, 0) = \vec{a}_0 \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Grâce à l'hypothèse de très fort confinement, nous pouvons utiliser l'approximation de plan tangent, ce qui légitime le changement de variable suivant.

Le développement des équations est donné en Annexe A et nous ne reportons ici que les équations essentielles à la compréhension.

$$\left\{ \begin{array}{l} x = R_2 \theta \\ y = R_2 - r \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Le système d'équations 3.1 est ensuite adimensionné en introduisant les grandeurs suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = R_2 \bar{x} \\ y = b \bar{y} \\ t = \bar{t} / \omega \\ p = \delta p \bar{p} \end{array} \right.$$

où  $\omega$  représente la fréquence angulaire (pulsation) de vibration de la structure.

De plus, soit  $U$  et  $V$  les échelles respectives de la vitesse tangentielle  $\bar{u}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$  et de la vitesse radiale  $\bar{v}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ ,  $\delta p$  l'échelle des variations de pression et  $a_0$  l'échelle d'amplitude de l'oscillation, correspondant au maximum du déplacement. Dans les équations réécrites en ces termes, des groupes adimensionnés apparaissent :

- $\eta = \frac{b}{R_2} \ll 1$ , représente l'effet du confinement ;
- $\varepsilon = \frac{a_0}{b}$ , est le rapport entre le maximum de l'amplitude d'oscillation et le jeu. Cette grandeur est bornée entre 0 et 1 ;
- $St_1 = \frac{R_1}{U/\omega}$ , est le nombre de Strouhal. Ce nombre compare l'ordre de grandeur du périmètre et la distance parcourue par une particule fluide.
- $Re = \frac{Ub}{\nu}$ , est le nombre de Reynolds ;
- $\sigma = \frac{\omega b^2}{\nu} = Re St_1 \frac{\eta}{1-\eta}$ , est le nombre de Stokes ;

L'analyse dimensionnelle de l'équation de conservation de la masse (Éq. A.6) permet de définir la relation entre les deux échelles de vitesse<sup>1</sup> :

$$V = \eta U$$

Nous pouvons déduire dans les conditions aux frontières du système d'Équations A.8) que le nombre de Strouhal  $St_1$  n'est pas une fonction de la fréquence mais seulement du jeu et de l'amplitude d'oscillation :

$$St_1 = \frac{1}{\varepsilon} \in [1, \infty[$$

**Donc, la quasi-stationnarité de l'écoulement ne dépend que de l'hypothèse de petit ou grand déplacement dans le cas d'un très fort confinement.**

Compte tenu de la définition de  $St_1$ , l'échelle de vitesse devient :

$$U = \omega R_1 \varepsilon. \quad (3.3)$$

La fréquence d'oscillation, donc, apparaît dans le nombre de Reynolds  $Re$  : imposer le mouvement dans un fluide au repos revient à imposer le temps caractéristique du déplacement et donc l'échelle de vitesse (Éq. 3.3). Ceci implique que l'intensité des effets visqueux est directement proportionnelle à la fréquence d'oscillation : plus la fréquence est élevée, plus les effets visqueux sont importants. Néanmoins, lorsque la fréquence d'oscillation augmente, l'épaisseur de la couche limite diminue et les effets visqueux restent confinés dans une zone très proche de la paroi. Le

---

<sup>1</sup>Toute dégénérescence de cette équation conduirait à une absurdité



système d'équations prend alors la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = 0 \\ \text{St}_1 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \left( \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right) = -\frac{\delta p}{\rho U^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\eta \text{Re}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \\ \bar{v}|_{\bar{y}=0} = 0 \quad \forall \bar{x}, \bar{t} \\ \bar{u}|_{\bar{y}=0} = 0 \quad \forall \bar{x}, \bar{t} \\ \bar{v}|_{\bar{y}=1} = -\cos(\bar{x}) \quad \forall \bar{x}, \bar{t} \\ \bar{u}|_{\bar{y}=1} = 0 \quad \forall \bar{x}, \bar{t} \\ \bar{v}|_{\bar{t}=0} = 1 \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \end{array} \right. \quad (3.4)$$

### 3.1.2 Carte d'écoulement pour le cas de deux cylindres concentriques

Le système Eq. 3.4 montre que les variations radiales de pression sont marginales. En effet, le mouvement du fluide induit la variation de pression tangentielle. Pour cette raison, l'échelle de pression se déduit de l'équation azimuthale qui donne la valeur la plus élevée :

$$\frac{\delta p}{\rho U^2} = \sup \left\{ \text{St}_1; 1; \frac{1}{\sigma \varepsilon} \left( = \frac{1}{\eta \text{Re}} \right) \right\}$$

où le premier terme représente l'échelle du terme d'inertie instationnaire, le deuxième celle du terme d'inertie convective et enfin, le dernier, l'échelle du terme de viscosité.

Dans cette analyse, les seuls paramètres indépendants sont l'amplitude réduite  $\varepsilon$  et le nombre de Stokes  $\sigma$ , utilisé à la place du nombre de Reynolds,  $\text{Re}$ . Nous rappelons que le nombre de Strouhal  $\text{St}_1$  est borné inférieurement par 1, alors que supérieurement, il est illimité. Donc l'échelle du terme instationnaire ne peut qu'être supérieure ou égale à 1.

La carte d'écoulement d'un fluide incompressible et visqueux, pour une géométrie très confinée, est présentée sur la Fig. 3.2. Le nombre de Strouhal et le produit  $\sigma \varepsilon$  sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée (en échelle logarithmique) de la carte. Les équations de Navier-Stokes complètes sont obtenues lorsque les valeurs des échelles de chaque terme sont comparables et donc égales à l'unité (disque noir). Pour des valeurs croissantes de  $\sigma \varepsilon \ll 1$  et de Strouhal, conditions représentées par l'arc en pointillé, les effets visqueux et d'inertie instationnaires sont prédominants. En conséquence, ce sont les équations de Navier-Stokes linéarisées qui décrivent le régime d'écoulement. La région en pointillé au-dessous de l'arc est associée aux équations de Stokes instationnaire (Navier-Stokes linéarisées quasi-statiques) : les effets visqueux sont tellement importants qu'aucun effet d'inertie ne peut les contrebalancer. Pour des valeurs de  $\sigma \varepsilon \gg 1$  et des valeurs croissantes du nombre de Strouhal, nous délimitons l'espace semi-infini blanc, qui est associé aux équations d'Euler linéarisées. Dans le cas où l'échelle d'inertie instationnaire est égale à 1 et celle du terme visqueux très faible, nous retenons les équations d'Euler : plus le nombre de Strouhal diminue, plus le terme d'inertie convective augmente, comparativement. Les

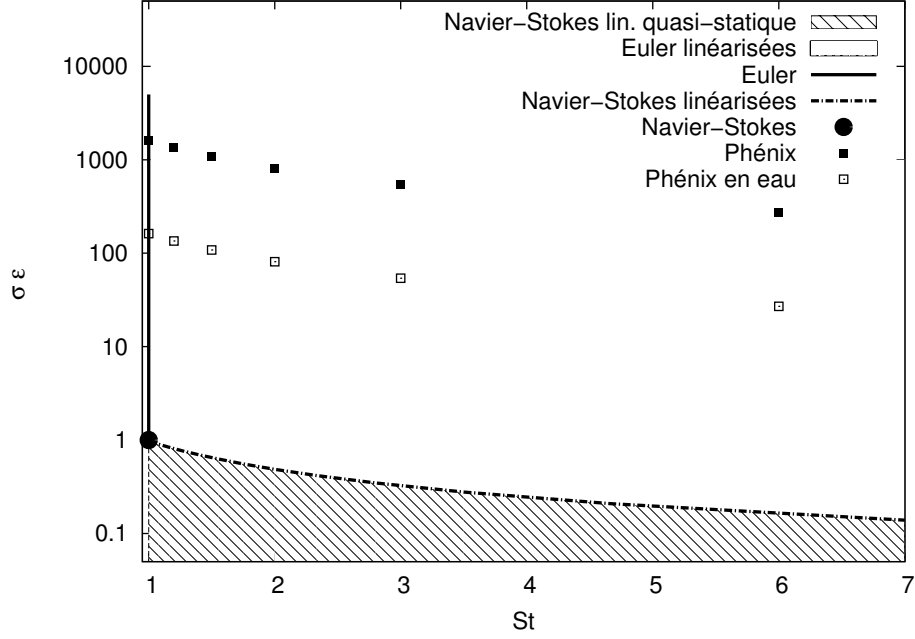


FIGURE 3.2 – Carte d'écoulement d'un fluide incompressible et visqueux autour d'un solide pour de très forts confinements

carrés noirs sont représentatifs de l'écoulement du sodium autour d'un cylindre ayant la même surface transversale que celle d'un assemblage de Phénix. Admettons que la fréquence de vibration d'un assemblage soit de 3 Hz [6], que le côté de l'hexagone soit de 7.14 mm et que l'espace inter-assemblage soit de 3 mm. En fonction de l'amplitude d'oscillation du solide, qui varie entre 0.5 et 3 mm, l'écoulement peut être décrit par les équations d'Euler complètes ou linéarisées. Si nous utilisons de l'eau à la place du sodium, les points se translatent vers le bas d'un ordre de grandeur à cause de la différence entre le viscosité cinématique des deux fluides, respectivement  $\nu_{eau} = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  et  $\nu_{Na} = 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ . Néanmoins le régime d'écoulement reste le même.

En Fig. 3.3, l'échelle de pression est donnée en fonction du nombre de Stokes. Cette échelle varie selon l'amplitude d'oscillation : dans l'hypothèse de très forts confinements, la valeur augmente pour une valeur du nombre de Stokes fixé.

### 3.1.3 Régime d'écoulement laminaire ou turbulent

La durée des oscillations de puissance neutronique mesurée pendant les AURNs est d'environ 200 ms (Fig. 1.2). Au début des oscillations, le fluide est supposé au repos. Soit  $b$  le jeu fluide de 3 mm,  $\dot{a}^{max}$  la vitesse maximale du solide obtenue par le produit de l'amplitude maximale d'oscillation  $a_0$  de 3 mm et la fréquence d'oscillation de 3 Hz et soit  $\nu_{Na}$  la viscosité cinématique du sodium. L'échelle de temps  $\tau_\nu$  nécessaire pour créer des tourbillons est d'environ 300 ms ( $\tau_\nu = b/\dot{a}^{max}$ ). Pour atteindre un écoulement développé, où l'épaisseur de la couche limite prend le demi-épaisseur du jeu, il faut environ un temps de 20 s, de deux ordres de grandeurs plus élevés que le temps caractéristique des phénomènes AURNs ( $t \sim b^2/4\nu_{Na}$ ). En conséquence, dans cette étude, la turbulence n'est pas considérée. En plus, pour une durée de 200 ms et un jeu de 3 mm, l'épaisseur de la couche limite de sodium est d'environ un vingtième de l'espace total

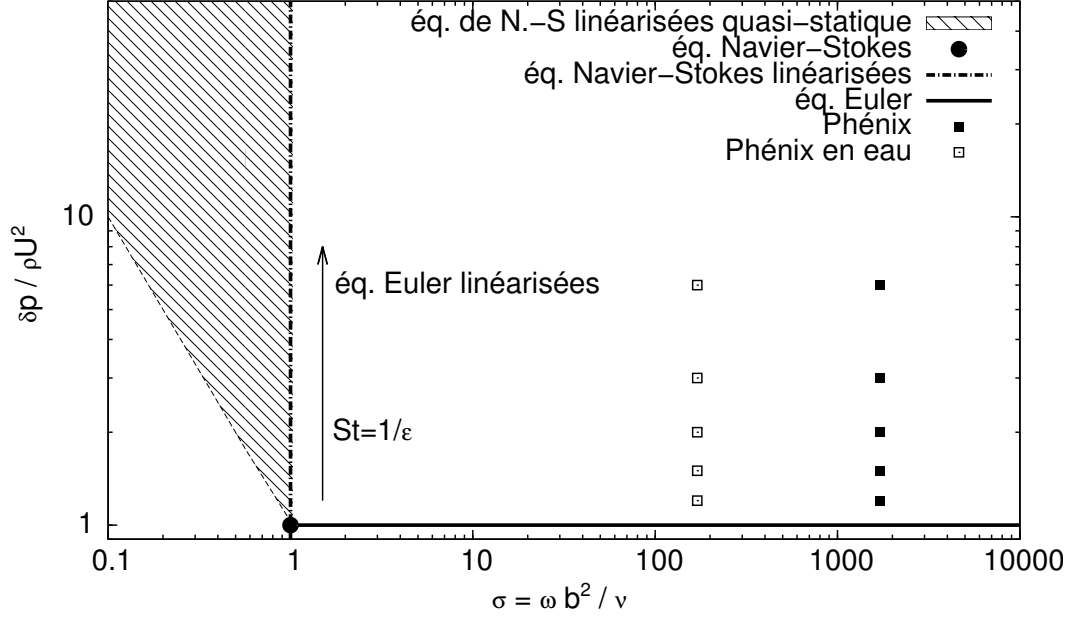


FIGURE 3.3 – Échelle de pression en fonction du nombre de Stokes pour l'écoulement d'un fluide incompressible et visqueux autour d'un solide oscillant, pour de très forts confinements

inter-assemblage ( $\delta \sim \sqrt{\nu \Delta t}$ ).

Nous pourrions donc considérer que les effets visqueux sont marginaux et que les équations d'Euler sont bien représentatives de ce type d'écoulement. En effet, de nombreux travaux (Section 2.2) ne considèrent pas les effets visqueux. Donc, pour décrire l'écoulement dans l'inter-assemblage de Phénix, ils utilisent les équations d'Euler complètes ou linéarisées.

Cependant, afin de ne pas faire d'hypothèse a priori, le terme visqueux sera quand même pris en compte de façon à estimer précisément son importance par rapport aux autres termes [40].

### 3.1.4 Conclusions

L'analyse phénoménologique de l'écoulement bidimensionnel d'un fluide incompressible et visqueux entre deux cylindres concentriques amène à définir une carte d'écoulement adaptée au cas de forts confinements. En raison du temps caractéristique des AURNs, l'écoulement n'est pas considéré comme turbulent mais les effets visqueux sont pris en compte, en tant qu'effets du second ordre. Pour des caractéristiques déduites de celles de Phénix (sodium liquide et équivalence de l'aire transversale entre cylindre et hexagone), cette carte nous permet de montrer que, selon l'amplitude d'oscillation, les équations d'Euler linéarisées ou complètes décrivent l'écoulement en première approximation.

## 3.2 Oscillations libres : solution analytique 2D pour deux cylindres concentriques

Nous développons la solution analytique du champ de vitesse du fluide et du déplacement de la structure pour le cas de vibrations libres d'un solide dans un fluide incompressible et visqueux

initialement au repos en géométrie confinée. Dans la littérature, la plupart des solutions analytiques sont développées pour un mouvement imposé. Pour la première fois, à notre connaissance, une solution analytique a été trouvée pour des vibrations libres en couplant les équations du fluide et de la structure. Ceci nous semble fondamental pour pouvoir valider les modèles numériques utilisés.

La description du problème et l'ensemble des équations sont ensuite présentées. Les détails du calcul sont reportés dans l'Annexe B. La formulation analytique du déplacement de la structure et du champ de vitesse est fournie dans le cas d'écoulement d'un fluide parfait et d'un fluide visqueux.

### 3.2.1 Description du problème

Nous étudions les vibrations libres du dispositif en Figure 3.1 [40]. L'oscillation libre  $a(t)$  est l'inconnue du système, ainsi que l'échelle de temps de vibration  $\tau$ , inverse de la fréquence angulaire  $\omega$ .

Nous analysons le comportement de l'écoulement du fluide et de la structure couplés dans le cas d'un fort confinement (ou petits jeux) et de petites amplitudes d'oscillations. Pour ce faire, les équations de Navier-Stokes sont couplées avec l'équation de la dynamique des structures pour des oscillations à un degré de liberté (Eq. B.2). Nous utilisons la condition d'adhérence ou de glissement selon que le fluide est supposé être visqueux ou parfait.

Les champs de vitesse et de pression de l'écoulement sont notés comme en Éq. 3.1. Le même changement de variable que celui de la Section précédente est effectué, suggéré par l'approximation du plan tangent (Éq. 3.2). Les détails du calcul sont reportés dans l'Annexe B.1.

Nous procédons à l'analyse dimensionnelle par le choix des échelles non-dimensionnées suivantes :

$$\begin{aligned} x = R_2 \bar{x} \quad y = b \bar{y} \quad t = \tau \bar{t} = \bar{t}/\omega \quad u(x, y, t) = U \bar{u}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \quad v(x, y, t) = V \bar{v}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \\ p(x, y, t) = \delta p \bar{p}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \quad a(t) = a_o \bar{a}(\bar{t}). \end{aligned}$$

Dans les équations réécrites en ces termes, des groupes non-dimensionnels apparaissent, déjà décrits dans la Section précédente. Le seul groupe différent est le nombre de Strouhal  $St_2$  : il est fonction du rayon du cylindre extérieur  $R_2$  à la place du cylindre interne  $R_1$ . Ceci n'apporte aucune modification à sa valeur physique.

$$St_2 = \frac{R_2/U}{\tau}$$

La conservation de la masse montre que l'échelle de vitesse tangentielle  $U$  et celle radiale  $V$  sont dans la même relation exprimée par l'Éq. 3.3.

Les conditions de non-pénétration des parois solides permettent d'établir que, le nombre de Strouhal est indépendant de la fréquence d'oscillation et que l'Éq. 3.3 demeure. Le tenseur de Cauchy  $\sigma$  et la force fluide qui agit sur le cylindre sont calculés au moyen de l'Équation B.9 (voir Annexe B.1).

Le système d'équations B.2 prend la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = 0 \\ \text{St} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} = -\frac{\delta p}{\rho U^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\eta \text{Re}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \\ \frac{m_s}{k_s \tau^2} \ddot{\bar{a}} + \frac{c_s}{k_s \tau} \dot{\bar{a}} + \bar{a} = -\frac{\delta p}{\eta \varepsilon k_s} \int_0^{2\pi} \bar{p}|_{\bar{y}=1} \cos \bar{x} d\bar{x} \\ \bar{v}|_{\bar{y}=0} = 0 \quad \forall \bar{x}, \bar{t} \\ \bar{u}|_{\bar{y}=0} = 0 \quad \forall \bar{x}, \bar{t} \\ \bar{v}|_{\bar{y}=1} = -\cos(\bar{x}) \quad \forall \bar{x}, \bar{t} \\ \bar{u}|_{\bar{y}=1} = 0 \quad \forall \bar{x}, \bar{t} \\ \bar{v}|_{\bar{t}=0} = 1 \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \end{array} \right. \quad (3.5)$$

où l'intégrale est évaluée sur la frontière non déplacée (aplatissement des conditions aux frontières).

La force fluide déduite du tenseur des contraintes se réduit à la seule force de pression du fluide et les effets visqueux sont négligeables ( $\eta \ll 1$ ).

### 3.2.2 Analyse de l'échelle de temps

Afin de connaître l'échelle de temps  $\tau$ , il faut examiner l'équation de la dynamique de la structure. Nous définissons les grandeurs suivantes :

$$\tau_m = \sqrt{\frac{m_s}{k_s}} \quad \tau_c = \frac{c_s}{k_s} \quad \tau_p = \tau \sqrt{\frac{\delta p}{\varepsilon \eta k_s}}$$

L'équation de la dynamique prend alors la forme :

$$\frac{\tau_m^2}{\tau^2} \ddot{\bar{a}} + \frac{\tau_c}{\tau} \dot{\bar{a}} + \bar{a} = -\frac{\tau_p^2}{\tau^2} \int_0^{2\pi} \bar{p}|_{\bar{y}=1} \cos \bar{x} d\bar{x} \quad (3.6)$$

Dans un problème d'oscillation libre, le moteur du mouvement est la force de rappel de la structure et l'écoulement fluide est régi par la pression induite de l'oscillation du corps solide. Donc, l'échelle de temps caractéristique du mouvement est celui qui relie la force de rappel à la force de pression :

$$\tau = \tau_p$$

En conséquence, l'échelle de pression  $\delta p$  est définie comme  $\varepsilon \eta k_s$ . Ceci conduit à la valeur de l'échelle de vitesse  $U = \varepsilon \eta^2 k_s b / \mu$ . Finalement, l'équation 3.6 devient :

$$\frac{\tau_m^2}{\tau_p^2} \ddot{\bar{a}} + \dot{\bar{a}} + \bar{a} = -\int_0^{2\pi} \bar{p}|_{\bar{y}=1} \cos \bar{x} d\bar{x}$$

### 3.2.3 Solution pour un écoulement de fluide visqueux

Comme dit précédemment, en raison des conditions de non-pénétration du cylindre mobile, le nombre de Strouhal  $St_2$  est égal à  $1/\varepsilon$ .

Afin de garder les effets visqueux, les forces de frottement et le gradient de pression doivent s'équilibrer :

$$\frac{1}{\eta Re} = \frac{(\delta p)}{\rho U^2} \geq \frac{1}{\varepsilon}$$

En conséquence, le système d'équations résolvant le problème devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = 0 \\ \zeta \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \\ \frac{\tau_m^2}{\tau_p^2} \ddot{\bar{a}} + \frac{\tau_c}{\tau_p} \dot{\bar{a}} + \bar{a} = -\int_0^{2\pi} \bar{p}(\bar{x}, 1, \bar{t}) \cos \bar{x} d\bar{x} \\ \bar{v}|_{\bar{y}=0} = 0 \quad \forall \bar{x}, \bar{t} \\ \bar{u}|_{\bar{y}=0} = 0 \quad \forall \bar{x}, \bar{t} \\ \bar{v}|_{\bar{y}=1} = -\cos(\bar{x}) \quad \forall \bar{x}, \bar{t} \\ \bar{u}|_{\bar{y}=1} = 0 \quad \forall \bar{x}, \bar{t} \\ \bar{v}|_{\bar{t}=0} = 1 \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \end{array} \right. \quad (3.7)$$

où  $\zeta$  est défini comme  $\eta Re/\varepsilon$ . La solution de ce système est obtenue par la transformation de Laplace. Les détails de ce calcul sont donnés dans B.2. L'expression de l'amplitude d'oscillation est :

$$\hat{a} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \left[ \frac{\tau_m^2}{\tau_p^2} s^2 + \frac{\tau_c}{\tau_p} s + 1 + \pi \sigma s^2 \left( 1 - \frac{\tanh \frac{1}{2} \sqrt{\sigma s}}{\frac{1}{2} \sqrt{\sigma s}} \right)^{-1} \right]^{-1} \quad (3.8)$$

La transformée inverse de Laplace est fournie par une inversion numérique avec Matlab.

### 3.2.4 Solution pour un écoulement fluide non-visqueux

Pour résoudre l'écoulement d'un fluide non-visqueux entre deux cylindres concentriques, il faut poser la condition de glissement sur la paroi mobile du cylindre interne. Celle-là est définie par l'équation dimensionnelle :

$$\dot{a} [a - r \cos \theta] - [r + a \cos \theta] u_r + a \sin \theta u_\theta = 0$$

Sous forme non-dimensionnée et pour les hypothèses de forts confinements et de petites amplitudes d'oscillation, la condition de glissement à la paroi mobile devient :

$$\begin{cases} \bar{v}|_{\bar{y}=1} = -\varepsilon \text{St}_2 \dot{\bar{a}} \cos \bar{x} \\ \bar{v}|_{\bar{y}=0} = 0 \end{cases}$$

Lorsque les effets de la viscosité sont négligeables, l'échelle de pression devient dominante :

$$\frac{1}{\eta Re} \ll \frac{(\delta p)}{\rho U^2} \quad \frac{(\delta p)}{\rho U^2} = \frac{1}{\varepsilon}$$

Les équations pour résoudre le problème deviennent alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = 0 \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \\ \frac{\tau_m^2}{\tau_p^2} \ddot{\bar{a}} + \frac{\tau_c}{\tau_p} \dot{\bar{a}} + \bar{a} = -\int_0^{2\pi} \bar{p}(\bar{x}, 1, \bar{t}) \cos \bar{x} d\bar{x} \\ \bar{v}|_{\bar{y}=0} = 0 \\ \bar{v}|_{\bar{y}=1} = -\varepsilon \text{St}_2 \dot{\bar{a}} \cos \bar{x} \end{cases} \quad (3.9)$$

La solution de ce système (dans l'Annexe B.3) fournit une expression simple pour le champ de vitesse et le champ de pression (Éq. 3.10).

$$\begin{cases} \bar{a} = \left[ \cos\left(\frac{\theta_p}{2} \sqrt{4 - \theta_c^2} \bar{t}\right) + \frac{\theta_c}{\sqrt{4 - \theta_c^2}} \sin\left(\theta_p \sqrt{4 - \theta_c^2} \bar{t}\right) \right] \exp\left(-\frac{\theta_c \theta_p}{2} \bar{t}\right) \\ \bar{p}(\bar{x}, \bar{t}) = \ddot{\bar{a}} \cos \bar{x} \\ \bar{u}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \dot{\bar{a}} \sin \bar{x} \\ \bar{v}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = -\dot{\bar{a}} \bar{y} \cos \bar{x} \end{cases} \quad (3.10)$$

où

$$\tau_f^2 = \tau_m^2 + \pi \tau_p^2 \quad \theta_p = \frac{\tau_p}{\tau_f} \quad \theta_c = \frac{\tau_c}{\tau_f}$$

L'amplitude d'oscillation de la structure ne peut diminuer qu'en raison de son propre amortissement ; dans le cas où il peut être négligé, le cylindre oscille indéfiniment avec une évolution sinusoïdale.

### 3.2.5 Conclusions

Une solution analytique du déplacement d'un cylindre dans un fluide confiné pendant une oscillation bidimensionnelle libre a été proposée pour la première fois. Elle a été obtenue par la

transformée de Laplace dans le cas d'un fluide visqueux et, ensuite, non-visqueux. Cette solution nous servira pour valider les modèles numériques dans le cas de vibrations libres en géométrie confinée.

### 3.3 Oscillations imposées : solution analytique 2D pour deux cylindres concentriques

Nous développons une solution analytique pour mouvement imposé de deux cylindres concentriques en approximation d'écoulement bidimensionnel. Le cylindre interne est mobile dans un fluide initialement au repos, tandis que le cylindre extérieur est fixe.

Comme indiqué dans la Section 2.2, la plupart des travaux portant sur l'IFS concernaient des études analytiques et/ou numériques dans le cas de mouvements imposés (e.g. [20, 8]).

Par rapport à la solution de Chen, qui nous sert de référence (voir [8]), nous proposons une solution analytique valide pour des forts confinements pour deux cylindres concentriques en approximation d'écoulement bidimensionnel. Le cylindre interne se déplace d'un mouvement horizontal imposé dans un fluide visqueux initialement au repos. Nos solutions des champs de vitesse et de pression obtenues sont stables et elles ne présentent pas de problèmes numériques dérivant de l'utilisation des fonctions de Bessel.

Grâce à l'hypothèse de fort confinement et de faible amplitude d'oscillation il est possible d'utiliser l'approximation du plan tangent. Le problème est le même que celui posé dans la Section 3.1. Nous renvoyons pour les détails du calcul à l'Annexe A.

Le système d'équations définissant ce problème a déjà été décrit dans la Section 3.1 (Éq. 3.1). En conséquence, dans la suite, nous résolvons directement le système d'équations adimensionné reporté en Équation 3.4.

#### 3.3.1 Solution pour un fluide visqueux et forts confinement

Nous supposons que :

$$\eta \ll 1 \quad \frac{\delta p}{\rho U^2} \approx \frac{1}{\eta \text{Re}} \sim \text{St} \gg 1 \quad (3.11)$$

Avec ces hypothèses, le terme d'inertie convective devient négligeable et le système obtenu est linéaire.

Admettons que le champ de vitesse et de pression aient une solution à variables séparables :

$$\begin{cases} \bar{u}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \tilde{u}(\bar{x}, \bar{y}) e^{i\bar{t}} \\ \bar{v}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \tilde{v}(\bar{x}, \bar{y}) e^{i\bar{t}} \\ \bar{p}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \tilde{p}(\bar{x}, \bar{y}) e^{i\bar{t}} \end{cases} \quad (3.12)$$

Nous substituons ces expressions dans le système d'Équations 3.4. Les détails sont donnés en Annexe 3.3. Finalement nous pouvons obtenir la solution analytique des champs de vitesse et de



pression (Éq. 3.13) :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \bar{u} = e^{i\bar{t}} \sin \bar{x} \left\{ -\frac{\eta \tanh(\frac{\sqrt{\sigma i}}{2} \bar{y})}{\tanh(\frac{\sqrt{\sigma i}}{2})} \frac{1 - \tanh(\frac{\sqrt{\sigma i}}{2})}{1 - \tanh(\frac{\sqrt{\sigma i}}{2} \bar{y})} + \right. \\
 \left. \left[ \sqrt{\sigma i} + \eta \left( 1 - \sqrt{\sigma i} \frac{1 - \tanh(\frac{\sqrt{\sigma i}}{2})}{2 \tanh(\frac{\sqrt{\sigma i}}{2})} \right) \right] \left( \frac{\cosh(\frac{\sqrt{\sigma i}}{2} \bar{y}) + \sinh(\frac{\sqrt{\sigma i}}{2} \bar{y}) \tanh(\frac{\sqrt{\sigma i}}{2}) - 1}{2 \tanh(\frac{\sqrt{\sigma i}}{2}) - \sqrt{\sigma i}} \right) \right\} \\
 \bar{v} = -e^{i\bar{t}} \cos \bar{x} \left\{ \left( \frac{\eta \sqrt{\sigma i}}{\tanh(\frac{\sqrt{\sigma i}}{2})} \frac{1 - \tanh(\frac{\sqrt{\sigma i}}{2})}{1 - \tanh(\frac{\sqrt{\sigma i}}{2} \bar{y})} + \frac{\bar{y}}{2} \frac{1 - \tanh(\frac{\sqrt{\sigma i}}{2})}{\tanh(\frac{\sqrt{\sigma i}}{2})} \right) + \right. \\
 \left. \left[ 1 + \eta \left( \frac{1}{\sqrt{\sigma i}} - \frac{1 - \tanh(\frac{\sqrt{\sigma i}}{2})}{2 \tanh(\frac{\sqrt{\sigma i}}{2})} \right) \right] \left( \frac{\sinh(\frac{\sqrt{\sigma i}}{2} \bar{y}) + \cosh(\frac{\sqrt{\sigma i}}{2} \bar{y}) \tanh(\frac{\sqrt{\sigma i}}{2}) - \tanh(\frac{\sqrt{\sigma i}}{2}) - \sqrt{\sigma i} \bar{y}}{2 \tanh(\frac{\sqrt{\sigma i}}{2}) - \sqrt{\sigma i}} \right) \right\} \\
 \bar{p} = \sigma i \cos \bar{x} e^{i\bar{t}} \frac{\tanh(\frac{\sqrt{\sigma i}}{2}) + \sqrt{\sigma i}}{2 \tanh(\frac{\sqrt{\sigma i}}{2}) - \sqrt{\sigma i}}
 \end{array} \right\} \quad (3.13)$$

Le champ de pression résultant est proportionnel au nombre de Stokes  $\sigma$  et dépendant seulement de la coordonnée tangentielle : pour de forts confinements la pression ne varie pas radialement.

### 3.3.2 Validation de la solution analytique : comparaison avec la solution de Chen [8]

La solution analytique trouvée ci-dessus a été comparée avec celle de Chen [8]. Sur les Figures 3.4, Fig. 3.5 et Fig. 3.6 nous montrons la vitesse tangentielle  $u_\theta$  du fluide à la fin de la période pour un cylindre interne de rayon  $R_1 = 100$  mm et des jeux de 1, 3.5 et 7 mm (respectivement  $\eta = 0.009, 0.03$  et  $0.065$ ). La viscosité du fluide est  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ , la fréquence d'oscillation  $f = 1$  Hz et  $\varepsilon = 0.01$ , pour pouvoir comparer notre solution avec celle de Chen.

Notre solution analytique est en très bon accord avec la solution de Chen. Plus l'anneau de fluide est mince, plus notre solution analytique est proche de la solution de référence.

Il apparaît assez évident dans ces profils de vitesse que l'écoulement du fluide change en fonction du jeu. En fait, le profil dit « à la Poiseuille » (Fig. 3.4) est propre à des configurations géométriques très confinées ( $b = 1$  mm) ; en revanche, en augmentant le jeu, le régime d'écoulement tend vers le régime d'Euler, où l'effet de la viscosité reste proche des parois (Fig. 3.6).

### 3.3.3 Conclusions

Une solution analytique du champ de vitesse dans un fluide visqueux confiné est proposée pour mouvement bidimensionnel imposé. La solution trouvée a été confrontée avec la solution analytique de Chen disponible dans la littérature [8] et elles sont en très bon accord.

Les profils de vitesse montrent clairement que en fonction du jeu le régime d'écoulement change : plus le jeu est grand, plus les effets visqueux sont confinés et proches des parois ; plus le jeu est faible, plus le profil de vitesse se rapproche d'un profil type Poiseuille.

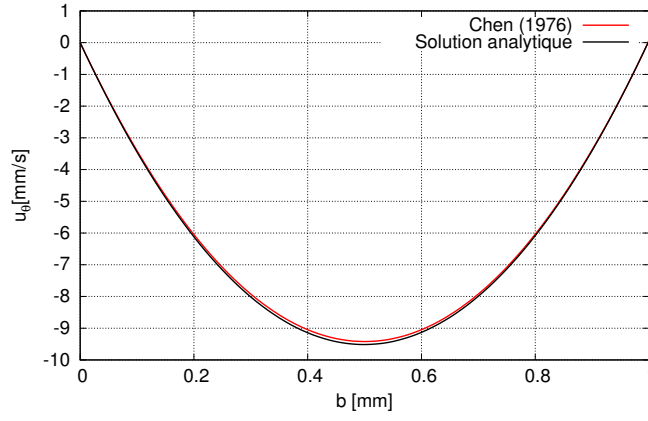


FIGURE 3.4 – Vitesse tangentielle  $u_\theta|_{\theta=\pi/2}$  à la fin de la période pour  $\eta = 0.009$

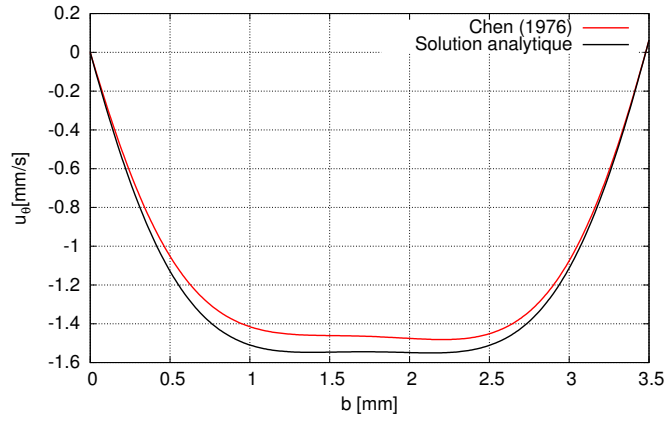


FIGURE 3.5 – Vitesse tangentielle  $u_\theta|_{\theta=\pi/2}$  à la fin de la période pour  $\eta = 0.03$

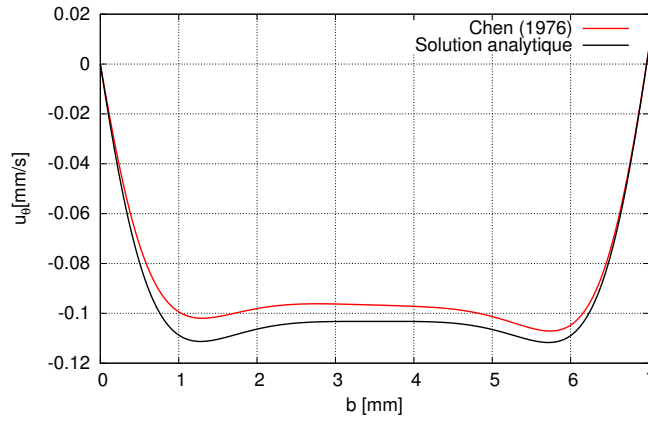


FIGURE 3.6 – Vitesse tangentielle  $u_\theta|_{\theta=\pi/2}$  à la fin de la période pour  $\eta = 0.065$



## Deuxième partie

# Présentation et validation des modèles numériques



# Chapitre 4

## Modèles numériques d'IFS : description du modèle 2D « Cast3M Navier-Stokes » et du modèle « Cast3M $up\phi$ »

Dans ce chapitre, nous présentons deux modèles numériques pour des problèmes d'IFS utilisant le code Cast3M [7]. Le premier modèle numérique est adapté à la résolution des équations de Navier-Stokes en formulation ALE (Arbitrarian Lagrange-Euler) ; le deuxième, le modèle  $up\phi$  [44], résout les équations d'Euler linéarisées. Les deux modèles couplent leurs équations du fluide avec l'équation de la dynamique du corps rigide.

### 4.1 Modèle « Cast3M Navier-Stokes » : équations de Navier-Stokes en formulation ALE

Considérons le cas de deux corps rigides, le corps externe étant fixe et le corps interne se déplaçant dans un fluide incompressible, visqueux et initialement au repos. Nous avons choisi de résoudre pour le fluide les équations de Navier-Stokes incompressible, projetées dans un repère mobile  $\Omega(t)$  dans le cadre d'une formulation arbitraire Lagrange-Euler (ALE). Pour ce faire, nous introduisons la vitesse de grille  $w$ , indiquant avec  $j$  la direction de déplacement. Cette vitesse  $w$  intervient dans la dérivé temporelle d'une fonction  $f$  quelconque comme suit :

$$\frac{\delta f}{\delta t} = \frac{\partial f}{\partial t} + w_j \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

L'oscillation du solide est décrite par l'équation de la dynamique du corps rigide (Éq. 2.6). Pour calculer l'évolution dans le temps de la position du corps rigide  $a_i$ , il faut évaluer au même temps la force fluide qui agit sur le corps et donc le tenseur des contraintes  $\sigma$ . Alors, le système

d'équations qui décrit le mouvement du fluide est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ \rho \frac{\delta u_i}{\delta t} + \rho(u_j - w_j) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \\ \dot{a}_i|_{\Gamma_s} = u_i|_{\Gamma_s} \\ \dot{a}_i|_{\Gamma_{ext}} = u_i|_{\Gamma_{ext}} = 0 \\ a_i|_{t=0} = a_{i,0} \end{array} \right. \quad (4.1)$$

où  $w_j$  représente la composante du champ de vitesse de grille dans la  $j$ -ème direction dans le domaine  $\Omega(t)$  [m/s]. Ces équations sont résolues par le code aux éléments finis Cast3M [7].

La masse du fluide  $M$  contenue dans le volume  $\Omega$  est constante au cours du temps :

$$M = \int_{\Omega(t)} \rho d\Omega$$

Nous avons, donc, utilisé la règle de Leibnitz dans un repère fixe pour définir le bilan de masse dans  $\Omega$  :

$$\frac{dM}{dt} = \underbrace{\int_{\Omega(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv}_{=0} + \int_{\Gamma} \rho u_i n_i d\Gamma = \int_{\Gamma} \rho u_i n_i d\Gamma = 0$$

Par le théorème de Green, nous obtenons :

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} d\Omega = 0 \quad \forall \Omega$$

Le champ de vitesse est donc à divergence nulle en tout points.

Aux frontières nous imposons la condition d'adhérence : le contour du maillage fluide coïncide avec les bords de la structure, c'est à dire que la vitesse de grille  $w$  et la vitesse du fluide coïncident sur les structures. En revanche, à l'intérieur du domaine fluide,  $w_j$  est définie selon l'Équation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_j \partial x_j} = 0 & \text{dans } \Omega(t) \\ w_i|_{\Gamma} = u_i|_{\Gamma} & \text{dans } \Gamma_s \text{ et } \Gamma_{ext} \end{array} \right.$$

Ceci permet de satisfaire aisément les trois contraintes suivantes :

- le nombre et le type d'éléments ne doivent pas varier ;
- les connectivités doivent rester identiques ;
- les éléments ne doivent pas dégénérer.

En conséquence, nous pouvons déduire le champ de déplacement des points du domaine du maillage :

$$dx_j = \Delta t w_j$$

### 4.1.1 Formulation variationnelle des équations de Navier Stokes

Nous avons choisi de résoudre les équations de Navier-Stokes par une méthode d'éléments finis. Nous avons construit une formulation variationnelle en multipliant les équations dans le système 4.1 respectivement par deux fonctions tests  $\psi_i$  et  $\pi$  qui seront choisies dans les bons espaces. Ensuite, nous intégrons ces équations sur le domaine  $\Omega$  :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \pi \frac{\partial u_i}{\partial x_i} d\Omega = 0 & \forall \pi \in \mathbf{L}^2 \\ \int_{\Omega} \psi_i \left\{ \underbrace{\rho \frac{\partial u_i}{\partial t}}_{M_f} + \underbrace{\rho(u_j - w_j) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{A_c} + \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x_i}}_{A_p} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{A_\mu} \right\} d\Omega = 0 & \forall \psi_i \in \mathbf{L}^2 \text{ et } u_i \in \mathbf{H}^2 \end{cases} \quad (4.2)$$

où

- $\mathbf{L}^2(\Omega)$  est l'espace des fonctions définies sur  $\Omega$  et de carrés intégrables ;
- $\mathbf{H}^m(\Omega)$  est l'espace des fonctions définies sur  $\Omega$  et dont les dérivées jusqu'à l'ordre  $m$  sont de carrés intégrables.

Nous intégrons par parties les équations précédentes sur le domaine  $\Omega$  et nous appliquons le théorème de Green-Ostrogradsky respectivement pour les contraintes visqueuses et les contraintes de pression :

#### Contraintes de Pression

$$\begin{aligned} M_p &= \int_{\Omega} \psi_i \frac{\partial p}{\partial x_j} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_i p}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\Omega} p \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} d\Omega \\ &= \underbrace{\int_{\Gamma} \psi_i p n_i d\Gamma}_{F_p} - \underbrace{\int_{\Omega} p \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} d\Omega}_{C^t} \\ &\quad \forall \psi_i \in \mathbf{H}^1 \text{ et } p \in \mathbf{L}^2 \end{aligned}$$

#### Contraintes visqueuses

$$\begin{aligned} M_v &= \int_{\Omega} \psi_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \psi_i \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} d\Omega - \int_{\Omega} \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} d\Omega \\ &= \underbrace{\int_{\Gamma} \psi_i \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j d\Gamma}_{F_v} - \underbrace{\int_{\Omega} \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} d\Omega}_{A_v} \\ &\quad \forall \psi_i \text{ et } u_i \in \mathbf{H}^1 \end{aligned}$$



### 4.1.2 Algorithme de Projection incrémentale : masse volumique constante

Parmi les algorithmes de projection incrémentale, nous utilisons l'algorithme proposé par Jean-Luc Guermond [23] dans le cas d'une masse volumique constante. Sous forme semi-discrète, elle prend la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho(\tilde{\underline{u}}^n - \tilde{\underline{u}}^{n-1})}{\Delta t} + \rho(\tilde{\underline{u}}^{n-1} - \tilde{\underline{w}}^{n-1}) \nabla \tilde{\underline{u}}^n + \frac{1}{2} \rho \tilde{\underline{u}}^n \nabla \cdot \tilde{\underline{u}}^{n-1} - \mu \nabla^2 \tilde{\underline{u}}^n = \underline{f}^n - \nabla (2p^{n-1} - p^{n-2}) \\ \tilde{\underline{u}}^n|_{\Gamma} = \underline{b}^n \\ \nabla \cdot (\nabla \lambda^n) = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \tilde{\underline{u}}^n \\ \hat{n} \cdot \underline{u}^n|_{\Gamma} = \hat{n} \cdot \underline{b}^n \\ p^n = p^{n-1} + \lambda^n \\ \underline{u}^n = \tilde{\underline{u}}^n - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla \lambda^n \end{array} \right. \quad \text{sur } \Omega(t) \quad (4.3)$$

(Facultatif)

L'intérêt de ce schéma est que la vitesse  $\tilde{\underline{u}}$  a été réinjectée comme vitesse de transport dans l'équation de quantité de mouvement. Ceci permet d'avoir un équilibre rigoureux des forces sur un pas de temps donné. Pour assurer cette dernière condition, à chaque pas de temps, nous itérons pour résoudre la non linéarité des équations de Navier Stokes et aussi arriver à borner l'énergie totale du système fluide-structure. Pour cela, nous contrôlons l'énergie cinétique du fluide  $E_{cf}$  en utilisant un schéma en temps du second ordre du type Crank-Nicholson ou BDF2. Cette condition est souvent identifiée comme la condition GCL (Global conservation law) [19] ; néanmoins elle n'est souvent qu'approximativement vérifiée. Dans l'Annexe C, nous montrons que la stabilité du modèle numérique dépend de la conservation de l'énergie cinétique du fluide : si le bilan d'énergie est respecté, le modèle numérique est stable.

Lorsque le fluide est visqueux ou la diffusion numérique est importante, la GCL peut être vérifiée pour éviter un départ en instabilité. Dans notre cas, la diffusion est faible mais les effets du fluide sur la structure sont énormes. Pour cela, il faut donc vérifier la condition GCL. Néanmoins, lorsque les forces d'inertie deviennent négligeables, le système tend alors vers un équilibre quasi statique entre le fluide et la structure. Dès que la non linéarité devient faible (faible amplitude d'oscillation), la GCL devient plus facile à vérifier et l'instabilité numérique s'évanouit.

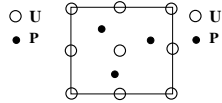
### 4.1.3 Algorithme de Newmark

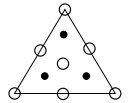
Le schéma d'intégration en temps est celui de Cast3M (schéma de Newmark) avec les coefficients  $\beta = 1/4$  et  $\gamma = 1/2$  réduit au déplacement de chaque hexagone. L'algorithme de Newmark est d'ordre 2 et inconditionnellement stable à condition que le comportement soit linéaire. Dans notre cas, la non-linéarité ne vient pas du comportement du matériau mais du comportement du fluide. Alors, pour éviter les instabilités, nous avons repris les modifications apportées à ce schéma dans Cast3M pour traiter les cas non linéaires [46].

$$\begin{cases} m\ddot{a}^n + ka^n = F_f^n \\ \tilde{k} = k + \frac{4m}{\Delta t^2} + \frac{2c}{\Delta t} \\ da = \left( F_f^n + F_f^{n+1} - 2ka^n + \frac{4m}{\Delta t}\dot{a}^n \right) / \tilde{k} \\ a^{n+1} = a^n + da \\ \dot{a}^{n+1} = \frac{2}{\Delta t}(a^{n+1} - a^n) - \dot{a}^n \\ \ddot{a}^{n+1} = \frac{1}{m}(F_f^{n+1} - ka^{n+1}) \\ F_f^{n+1} = \int_{\partial\Omega} \psi_i p n_i dA + \int_{\partial\Omega} \psi_i \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j dA \quad \forall \psi_i \end{cases}$$

#### 4.1.4 Discrétisation

Nous choisis des éléments finis quadratique, la pression étant linéaire non conforme. Il s'agit du quadrangle à 9 nœuds de Bercovier [4] et du triangle à 7 nœuds de Crouzeix-Raviard [10], les deux vérifiant la condition LBB.





LBB

$$\begin{aligned} U &\sim O(h^2)_{H^1} \\ p &\sim O(h^2)_{L^2} \end{aligned}$$

#### 4.1.5 Calcul de la masse ajoutée

Avec notre modèle 2D, nous calculons la valeur de la masse ajoutée moyennée dans le temps par unité de longueur. Nous définissons, comme déjà fait dans Fritz [20], la masse ajoutée  $M_{add}$  comme la masse qu'il faudrait ajouter à la structure (ensemble des hexagones en mouvement) pour avoir une énergie cinétique équivalente à l'énergie cinétique du système (structure plus fluide). Par rapport à Fritz, nous prenons en compte la contribution des effets visqueux à l'énergie cinétique du fluide.

Considérons un nombre  $n$  de structures, dont chacune est identifiée avec un indice  $h$  ( $h = [1, n]$ ). Chaque solide a pour masse  $m_h$  et son déplacement est  $a_h$ ;  $E_{cf}$  est l'énergie cinétique du fluide;  $\tau$  la période de l'oscillation. Alors, la masse ajoutée peut être écrite comme :

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \left( \sum_h m_h \dot{a}_h^2 + E_{cf} \right) dt = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{1}{2} \sum_h (m_h + M_{add}) \dot{a}_h^2 dt$$

d'où la masse ajoutée moyenne sur l'intervalle de temps  $[0, \tau]$ .

$$\bar{M}_{add} = \frac{\int_0^\tau E_{cf} dt}{\int_0^\tau \frac{\sum_h \dot{a}_h^2}{2} dt} \quad (4.4)$$

Cette dernière définition permet de calculer la masse ajoutée indépendamment de la géométrie. En plus, elle peut également s'appliquer pour les cas dans lesquels la structure vibre librement. Pour cette raison, elle peut s'avérer plus utile que la définition fournie par Chen [8].

## 4.2 Modèle « Cast3M $up\phi$ » : équations d'Euler linéarisées

Dans le modèle  $up\phi$ , nous résolvons, à l'aide du code Cast3M, le bilan de masse et de quantité de mouvement pour un fluide légèrement compressible (méthode de pénalisation) et non-visqueux dans un domaine confiné. Pour la structure, le modèle ne prend pas en compte le coefficient d'amortissement  $c_s$ .

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} \\ \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{1}{c^2} \dot{p} = 0 \\ \dot{a}_i \cdot \hat{n}|_{\Gamma} = u_i \cdot \hat{n}|_{\Gamma} \\ a_i|_{t=0} = a_{i,0} \end{cases}$$

où  $c$  est la vitesse du son [m/s]. La condition de continuité de la vitesse normale à l'interface fluide/structure se réduit à imposer la pression sur la surface du solide vibrant :

$$\ddot{a}_i \cdot \hat{n} = \dot{u}_i \cdot \hat{n} = \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \cdot \hat{n}$$

Sous l'hypothèse de fluide parfait, le tenseur des contraintes  $\sigma$  ne dépend que de la pression sur la surface solide :

$$F_{fx} = - \left( \int_{\Gamma_s} p \hat{n} d\Gamma_s \right) \hat{e}_x$$

étant  $\hat{e}_x$  l'axe de déplacement de la structure.

### 4.2.1 Formulation variationnelle des équations d'Euler linéarisées

Nous prenons la divergence de l'équation de quantité de mouvement du fluide :

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \ddot{p} \quad (4.5)$$

La formulation variationnelle de l'Équation 4.5 s'écrit :

$$\int_{\Omega} \left( \psi \Delta p - \frac{1}{c^2} \psi \ddot{p} + \psi \dot{q} \right) d\Omega = 0 \quad \forall \psi$$

En intégrant par partie :

$$\int_{\Gamma} \psi \nabla p \hat{n} d\Gamma - \underbrace{\int_{\Omega} \nabla \psi \nabla p d\Omega}_{K_F} - \frac{1}{c^2} \underbrace{\int_{\Omega} \psi \ddot{p} d\Omega}_{M_F} + \underbrace{\int_{\Omega} \psi \dot{q}_m d\Omega}_{\dot{Q}_m} = 0 \quad \forall \psi$$

Nous pouvons décomposer  $\Gamma$  suivant les types de parois que nous considérons : interface avec la structure mobile ou parois fixes ( $\Gamma = \Gamma_{ext} \cup \Gamma_s$ ). Pour une paroi fixe, la condition limite devient (condition limite par défaut) :

$$\int_{\Gamma_{ext}} \psi \nabla p \hat{n} d\Gamma = 0$$

Dans le cas où nous injectons un débit d'une paroi :

$$\int_{\Gamma_{inj}} \psi \nabla p \hat{n} d\Gamma = - \int_{\Gamma_{inj}} \rho \psi \dot{q}_v d\Gamma$$

Pour l'interface avec la structure :

$$\int_{\Gamma_s} \psi \nabla p \hat{n} d\Gamma = - \int_{\Gamma_s} \rho \psi \ddot{x} \hat{n} d\Gamma$$

Le système couplé (solide et fluide) est donc le suivant :

$$\begin{cases} \underbrace{m_s \ddot{a}_j}_{M_s} + \underbrace{k_s a_j}_{K_s} = - \underbrace{\int_{\Gamma_s} p \hat{n} d\Gamma_s}_C \\ \underbrace{\int_{\Gamma_s} \psi \hat{n} \ddot{a} d\Gamma_s}_{C^T} - \underbrace{\int_{\Omega} \nabla \psi \nabla p d\Omega}_{K_F} - \frac{1}{c^2} \underbrace{\int_{\Omega} \psi \ddot{p} d\Omega}_{M_F} = 0 \quad \forall \psi \end{cases}$$

Pour résoudre le système, il faut le mettre sous forme matricielle. Pour cela, nous avons indiqué avec des lettres chaque terme des deux équations. Le terme  $C$  est le terme de couplage entre le solide et le fluide. Il prend en compte les conditions aux frontières.  $M_s$  et  $K_s$  représentent respectivement la masse et la raideur de la structure, tandis que  $M_F$  et  $K_F$  sont la masse et la raideur du fluide. Ce dernier apparaît comme une contrainte générée par le gradient de pression. La formulation matricielle est alors :

$$\begin{pmatrix} M_s & 0 \\ \rho C^T & \frac{1}{c^2} M_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{a} \\ \ddot{p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_s & C \\ 0 & K_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le système n'est pas symétrique et pour le symétriser nous introduisons la nouvelle inconnue  $\Phi$  : elle est définie comme le potentiel du champ de déplacement.

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \dot{\Phi}$$

Cette définition peut être utilisée car nous supposons que l'écoulement est initialement irrotationnel et il le reste pendant le mouvement. Si nous introduisons cette nouvelle variable dans l'Éq. 4.5, nous obtenons :

$$\begin{cases} \rho \nabla \ddot{\Phi} + \nabla p = 0 \\ \rho \Delta \dot{\Phi} + \frac{1}{c^2} \dot{p} = 0 \end{cases}$$

Nous trouvons, en conséquence, que  $p = -\rho \ddot{\Phi}$ . À partir de-là, nous pouvons donc remplacer la pression avec la dérivée temporelle du second ordre et obtenir un système matriciel symétrique :

$$\begin{pmatrix} M_s & 0 & -\rho C \\ 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} M_f \\ -\rho C^T & -\frac{1}{c^2} M_f & \rho K_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{a} \\ \ddot{p} \\ \ddot{\Phi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_s & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho c^2} M_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ p \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si  $c \rightarrow \infty$ , comme dans le cas de fluide incompressible, nous avons :

$$\begin{pmatrix} M_s & -\rho C \\ -\rho C^T & \rho K_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{a} \\ \ddot{\Phi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Néanmoins, ce système n'est pas stable.

Dans le second membre des équations, nous pouvons toujours ajouter les termes liés aux forces volumiques ou aux forces externes. Dans cette description, nous avons choisi de les omettre pour des raisons de simplification.

#### 4.2.2 Coefficient d'amortissement de Rayleigh $C_{Ray}$

Dans le modèle  $up\phi$ , l'amortissement de la structure n'est pas pris en compte. En plus, comme les effets visqueux sont négligés, même l'amortissement ajouté n'est pas considéré. Afin d'obtenir un mouvement amorti de la structure, le coefficient d'amortissement de Rayleigh  $C_{Ray}$  [44] est utilisé. Il s'agit d'ajouter à la définition de la pression un terme lié à la variation dans le temps du champ de déplacement, de façon à avoir un terme lié à la vitesse de la structure :

$$p = -\rho(\ddot{\Phi} + \lambda \dot{\Phi})$$

Le système matriciel devient :

$$\begin{pmatrix} M_s & 0 & -\rho C \\ 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} M_f \\ -\rho C^T & -\frac{1}{c^2} M_f & \rho K_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{a} \\ \ddot{p} \\ \ddot{\Phi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_s & 0 & -\rho C \\ 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} M_f \\ -\rho C^T & -\frac{1}{c^2} M_f & \rho K_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{a} \\ \dot{p} \\ \dot{\Phi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_s & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho c^2} M_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ p \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finalement, l'amortissement de Rayleigh se traduit dans une combinaison linéaire entre la masse la raideur de la structure :

$$C_{Ray} = \lambda m_s + \mu_R k_s \quad (4.6)$$

où  $\lambda$  et  $\mu_R$  sont les coefficients avec lesquels nous obtenons l'amortissement voulu.

### 4.3 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons présenté les deux modèles numérique, « Cast3M Navier-Stokes » et « Cast3M  $up\phi$  », utilisés ensuite pour l'interprétation des essais. Les deux modèles sont différents pour les équations utilisées dans la description du mouvement fluide : le premier résout les équations de Navier-Stokes en formulation ALE et le deuxième celles d'Euler sur une géométrie fixe.

# Oscillations imposées et libres : validation du modèle numérique « Cast3M » Navier-Stokes en géométrie cylindrique et application à la géométrie hexagonale

## 5.1 Mouvement imposé : validation du modèle numérique 2D en géométrie cylindrique et application à la géométrie hexagonale

Dans ce chapitre, nous validons notre modèle numérique 2D « Cast3M Navier-Stokes » (Chapitre 4) avec notre solution analytique (Section 3.3) et celle de Chen [8] pour un corps cylindrique mobile selon un mouvement imposé avec un seul degré de liberté.

Ensuite, le modèle est appliqué à la géométrie hexagonale de la section transversale de la maquette PISE-1a. Finalement, nous effectuons la comparaison entre la structure cylindrique et hexagonale, pour vérifier quel est l'effet de la géométrie sur l'écoulement du fluide et le déplacement de la structure. Ce travail a été achevé grâce à une collaboration avec M. Angelucci de l'Université de Pise [1].

### 5.1.1 Validation du modèle numérique 2D « Cast3M Navier-Stokes » : géométrie cylindrique

Considérons le problème déjà posé dans la Section 3.3 et prenons en référence la Fig. 3.1. Le rayon du cercle interne  $R_1$  est calculé de telle façon que la surface du cercle soit identique à celle de la section transversale de la maquette PISE-1a. La masse volumique et la viscosité cinématique de l'eau sont données dans le Tab. 5.1. Le jeu  $b$  entre les cercles interne et externe est variable entre 1 et 100 mm. La fréquence d'oscillation est imposée à 1, 2 ou 10 Hz.

$R1$ [mm]	64.9
$b$ [mm]	1, 3, 7, 30, 100
$\varepsilon = a_o/b$	0.01
$f$ [Hz]	1, 2, 10
$\rho$ kg/m <sup>3</sup>	1000
$\nu$ m <sup>2</sup> /s	10 <sup>-6</sup>

TABLE 5.1 – Paramètres de référence pour la géométrie cylindrique

#### 5.1.1.1 Champ de vitesse dans le jeu : comparaison entre solution numérique et solution analytique

Afin de valider le modèle numérique « Cast3M Navier-Stokes », nous vérifions la congruence entre les champs de vitesse de la solution numérique et ceux des solutions analytiques.

Les profils de vitesse tangentielle le long d'un axe perpendiculaire à l'axe de déplacement du corps rigide (Fig. 5.1) ont été comparés à la solution analytique de Chen [8] qui utilise l'hypothèse de très petits déplacements. La comparaison avec notre solution analytique (Section 3.3) a été effectuée lorsque l'hypothèse de fort confinement est vérifiée.

Les calculs numériques montrent un parfait accord avec les solutions analytiques et les différents régimes d'écoulements sont bien représentés. Un léger écart près de la paroi fixe peut être expliqué par un maillage trop grossier dans cette zone (Fig. 5.1 d). En effet, il faudrait raffiner plus finement en espace et en temps pour que le calcul converge. Les caractéristiques du fluide et du solide étant fixées, les paramètres qui déterminent la réaction du fluide sur la structure sont :

- la largeur du jeu  $b$  ;
- la fréquence angulaire de l'oscillation  $\omega$ .

Pour des jeux de plus en plus petits (Fig. 5.1a), la couche limite visqueuse a tendance à s'étendre sur tout l'inter espace. Au contraire, lorsque le jeu augmente (Fig. 5.1b et 5.1c), cette couche limite devient plus mince et le profil de vitesse a tendance à s'aplatir. Dans ce dernier cas, les équations d'Euler pour un fluide non-visqueux, couplées avec la théorie de la couche limite, pourraient être utilisées pour décrire l'écoulement du fluide.

Lorsque la fréquence d'oscillation  $f$  augmente (Fig. 5.1d), nous observons le même comportement que celui induit par une augmentation du jeu : pour des fréquences élevées les effets visqueux restent confinés dans une couche attachée aux parois et le liquide a tendance à se comporter comme un fluide non visqueux.

#### 5.1.1.2 Coefficients de masse ajoutée $C_M$ : comparaison entre solution numérique et solution analytique

Afin d'évaluer les coefficients de masse et d'amortissement ajoutés, nous avons mis en œuvre plusieurs méthodes. La première utilise la définition de la masse ajoutée donné par Fritz [20]

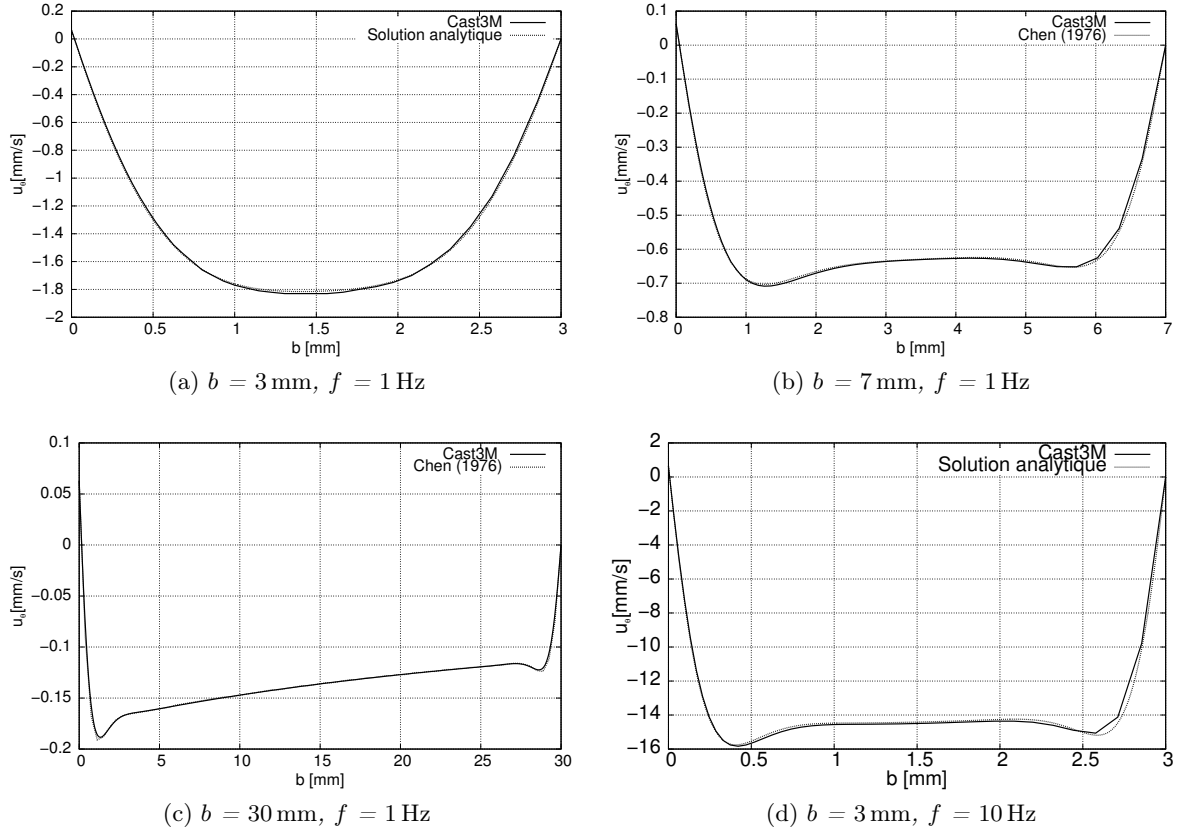


FIGURE 5.1 – Profils de vitesse tangentielle le long d'un axe perpendiculaire au déplacement du cylindre interne à la fin de la période d'oscillation

(Éq. 4.4) :

$$\bar{M}_{add} = \frac{\int_0^\tau E_{c,f} dt}{\int_0^\tau \frac{\dot{a}^2(t)}{2} dt} \quad C_M = \frac{\bar{M}_{add}}{\rho_f \pi R_1^2}$$

Nous avons, donc, utilisé le champ de vitesse calculé à partir du code pour évaluer l'énergie cinétique du fluide en considérant les effets visqueux. Une valeur moyenne de l'énergie cinétique du fluide,  $E_{cf}$  sur toute une période  $\tau$  a été calculée pour éviter les problèmes susceptibles de résulter d'une division par  $\dot{a} = 0$ .

La deuxième méthode s'appuie sur l'expression de la force fluide calculée à partir du champ de pression sur la paroi intérieure comme dans l'Équation 2.8. L'allure typique de la force de fluide, pour un déplacement forcé du cylindre, est montrée sur la Fig. 5.2. Au début de l'oscillation du cylindre, un pic sur la force fluide se produit (Fig. 5.2a) en raison du passage de l'immobilité au mouvement. Ce pic est très confiné dans les premiers instants du mouvement ( $t_{pic} < 1/100\tau$ ). Nous admettons donc qu'il peut être négligé dans une analyse globale de l'oscillation de la force fluide. Après ce pic, l'évolution dans le temps de  $F_f$  se stabilise sur un comportement sinusoïdal, déphasé par rapport à la vitesse du cylindre (Fig. 5.2b). Négligeant le pic, la force fluide, selon la direction  $j$  du déplacement, peut être écrite sous la forme suivante :

$$F_f(t) = \int_{\Gamma_s} \left[ -p\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \cdot \hat{n}_j d\Gamma = F_0 \cos(\omega t + \phi)$$



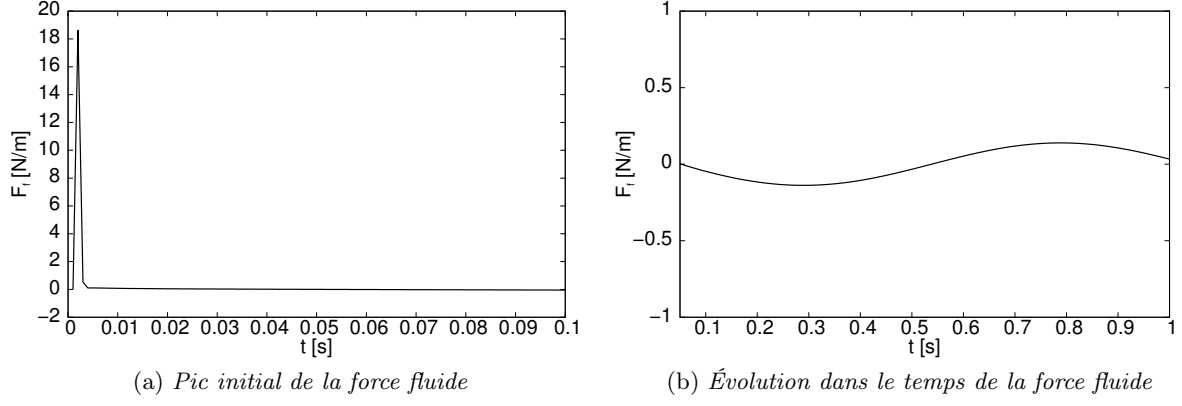


FIGURE 5.2 – Force exercée par le fluide sur un cylindre en mouvement forcé

où  $\phi$  représente le déphasage entre  $F_f(t)$  et la vitesse du cylindre  $\dot{a}(t)$ .

Comme suggéré par Chen [8], nous pouvons décomposer la force fluide en deux contributions : la première en phase avec l'accélération du solide et liée aux effets inertiels, la deuxième en phase avec la vitesse de la structure et liée aux effets dissipatifs. En conséquence, la force fluide prend la forme :

$$F_f(t) = B_0 \sin(\omega t) + C_0 \cos(\omega t)$$

où les coefficients  $B_0$  et  $C_0$  sont respectivement :

$$B_0 = F_0 \cos \phi \quad C_0 = F_0 \cos \left( \frac{\pi}{2} + \phi \right) \quad (5.1)$$

Les valeurs de la masse ajoutée et de l'amortissement ajouté sont ensuite facilement obtenues grâce aux relations suivantes :

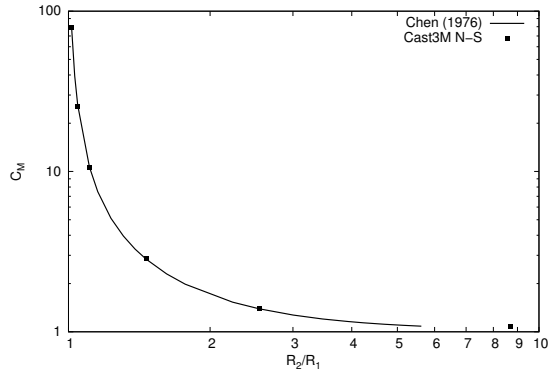
$$M_{add} = \frac{B_0}{a_o \omega^2} \quad C_D = \frac{C_0}{a_o \omega} \quad (5.2)$$

Les deux méthodes détaillées ci-dessus pour trouver la masse ajoutée (Éq. 4.4 et 5.2) ont donné des résultats très similaires de sorte que nous pouvons les considérer comme équivalentes. Dans ce qui suit, seuls les résultats obtenus avec la première méthode sont présentés (Fig. 5.3) et comparés à la solution analytique de Chen (déjà présentée en Fig. 2.5b).

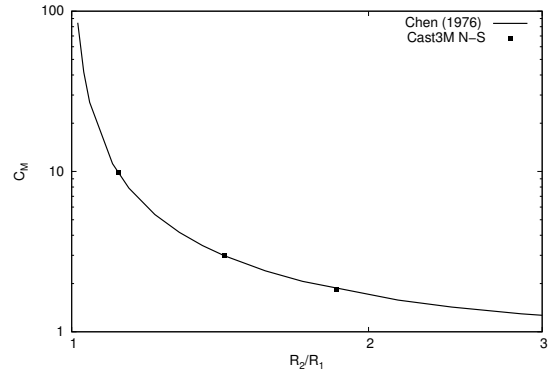
Sur la Fig. 5.3, nous observons que les calculs numériques avec le modèle « Cast3M Navier-Stokes » reproduisent le comportement des effets inertiels prédits par le modèle de Chen. Les valeurs du coefficient  $C_M$  pour différentes fréquences, sont en très bon accord avec la solution analytique (Fig. 5.3a et 5.3b). Les erreurs relatives sont inférieures à 1%.

La masse ajoutée augmente avec le confinement. Inversement, pour de faibles confinements, elle diminue, jusqu'à une valeur asymptotique (fonction du nombre de Stokes  $\sigma$ ), correspondant à la masse ajoutée d'un solide en milieu infini (pas de confinement). Cette valeur tend vers 1 quand  $\sigma$  tend vers l'infini [20, 8].

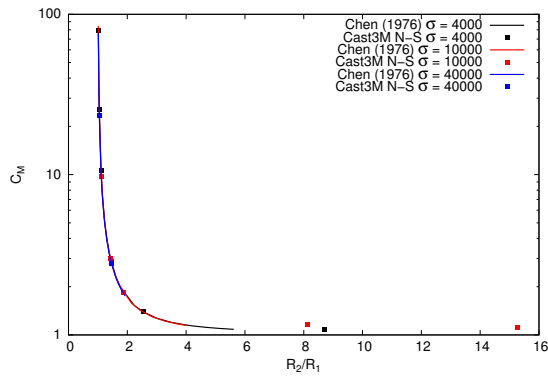
Une étude paramétrique a été effectuée en fonction du nombre de Stokes  $\sigma$  (Fig. 5.3c) : le coefficient de masse ajoutée augmente à mesure que le nombre de Stokes diminue. Le cas particulier de forts confinements est représenté sur la Fig. 5.3d : pour des  $\sigma$  d'un ordre de grandeur de différence, le rapport  $R_2/R_1$  étant maintenu constant, l'écart entre les valeurs du



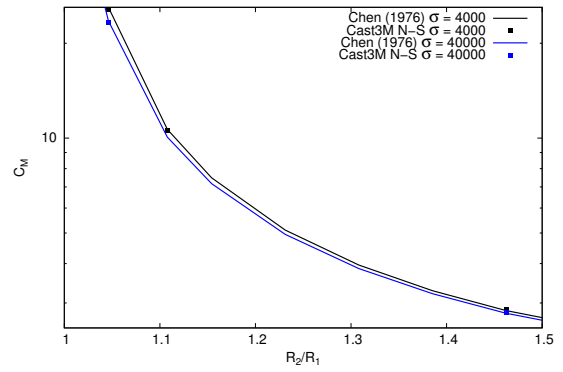
(a)  $f = 1 \text{ Hz}$



(b)  $f = 2 \text{ Hz}$



(c) Comparaison pour différents nombres de Stokes



(d) Comparaison pour très forts confinement et différents nombres de Stokes

FIGURE 5.3 – Comparaison du coefficient de masse ajoutée en fonction du confinement dans le cas de deux cylindres concentriques

coefficient de masse ajoutée est inférieur au 4%. C'est pourquoi, nous admettons que le coefficient  $C_M$  est indépendant de la fréquence d'oscillation.

### 5.1.1.3 Coefficient d'amortissement ajouté $C_D$ : comparaison entre solution numérique et solution analytique

Notre modèle numérique est capable d'évaluer les effets visqueux du fluide et, par suite, la force d'amortissement. Celle-ci est le terme qui agit en phase avec la vitesse du fluide (Éq. 5.1). Comme annoncé dans le paragraphe précédent, le coefficient d'amortissement ajouté  $C_D$  (Éq. 5.2) est déduit en décomposant la force fluide en deux contributions. Sur la Figure 5.4, nous présentons l'évolution du coefficient  $C_D$  en fonction du confinement. Bien que les valeurs calculées soient en bon accord avec la solution analytique, les erreurs relatives s'élèvent jusqu'à 6%, plus importantes que pour le coefficient de masse ajoutée. Cela pourrait venir d'erreurs d'arrondi dans notre post-traitement : vu que les valeurs du coefficient  $C_0$ , à partir duquel nous calculons  $C_D$  (Éq. 5.1), sont de l'ordre de quelques pourcent, le maintien d'une bonne précision est assez délicat.

À l'instar du coefficient de masse ajoutée, le coefficient d'amortissement augmente également lorsque le jeu diminue (Fig. 5.4a). De la même façon, le coefficient  $C_D$  diminue quand le nombre de Stokes augmente. En fait, une valeur du nombre de Stokes importante implique que les effets visqueux soient négligeables (voir Section 3.1).

L'influence du nombre de Stokes  $\sigma$  sur la sensibilité du coefficient d'amortissement est plus importante que sur le coefficient de masse ajoutée (Fig. 5.4b), surtout pour de faibles confinements (jeux élevés). En revanche, pour des très forts confinements, l'écart entre les deux courbes obtenu à nombre de Stokes différents diminue, comme pour le coefficient  $C_M$ .

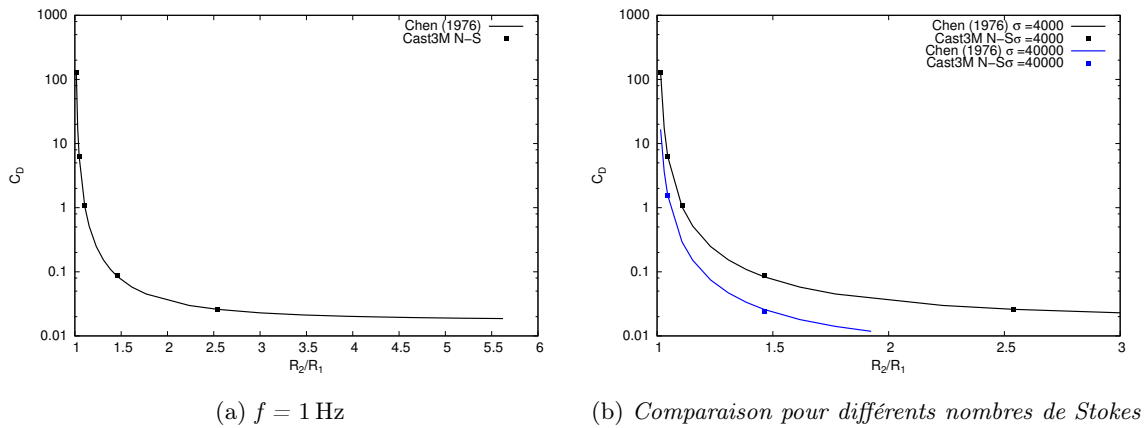


FIGURE 5.4 – Comparaison du coefficient d'amortissement en fonction du confinement dans le cas de deux cylindres concentriques

### 5.1.1.4 Conclusions pour la validation du modèle numérique en géométrie cylindrique

Une première analyse de notre modèle a été effectuée pour une géométrie cylindrique soumise à un mouvement sinusoïdal à fréquence imposée. Ce choix a permis une comparaison avec le modèle analytique de Chen, dans lequel les effets visqueux du fluide sont pris en compte. Plusieurs calculs

ont été réalisés avec différents jeux et différentes fréquences de vibration du cylindre. Les résultats obtenus montrent un très bon accord avec la solution analytique. Les régimes d'écoulement sont bien retrouvés même si la précision du calcul dépend du raffinement du maillage.

Les coefficients de masse ajoutée ont été correctement prédits et les erreurs sont inférieures à 1% pour le coefficient  $C_M$ . Le coefficient d'amortissement  $C_D$  est retrouvé avec des écarts plus élevés que ceux du coefficient  $C_M$  (jusqu'à 6%), qui sont probablement dûs à des erreurs d'arrondi (Fig. 5.4).

### 5.1.2 Effets de la géométrie du corps vibrant : comparaison entre un solide hexagonal et cylindrique

Dans cette section, une étude de l'effet de la forme géométrique du corps vibrant est réalisée. Nous sommes intéressés par la géométrie hexagonale du fait que les barres de combustible des réacteurs à neutrons rapides, comme Phénix ou le projet ASTRID, sont hexagonales. En conséquence, nos maquettes, représentatives de ces réacteurs, disposent d'assemblages hexagonaux.

#### 5.1.2.1 Comparaison des champs de vitesse dans le jeu

Afin de comprendre les différences de comportement dynamique entre hexagone et cylindre, nous choisissons de comparer deux cas qui ont le même régime d'écoulement fluide. Pour ce faire, nous avons comparé les profils de vitesse tangentielle  $u_\theta$  à la fin d'une période d'oscillation. Les paramètres suivants prennent les valeurs indiquées dans le Tab. 5.1 : propriétés physiques du fluide, paramètres du mouvement forcé, surface du corps oscillant  $A_s$ .

En revanche, plusieurs définitions de la dimension du jeu  $b$  dans la géométrie hexagonale ont été examinées. Nous avons considéré trois possibilités (Fig. 5.5) :

- distance entre deux sommets de l'hexagone (Fig. 5.5b) ;
- distance entre deux côtés de l'hexagone (Fig. 5.5c) ;
- distance entre deux côtés de l'hexagone qui permet de conserver la surface fluide par rapport à la surface fluide dans le cas cylindrique (Fig. 5.5d) .

La Fig. 5.6 représente les profils de vitesse tangentielle  $u_\theta$  à la fin de la période, pour une fréquence de 1 Hz et un jeu  $b$  de référence de 3 mm. Ces profils sont projetés sur un axe perpendiculaire à l'axe de déplacement du solide ( $\alpha = 90^\circ$ ) et sur un axe à  $\alpha = 60^\circ$  (voir Fig. 5.5). L'axe des abscisses de la Fig. 5.6 est adimensionné en prenant respectivement pour  $R_1$  et  $R_2$  le rayon interne et externe du cylindre de référence. En gardant la même surface fluide entre cylindre et hexagone, nous obtenons le même profil de vitesse tangentielle  $u_\theta$  (Fig. 5.6a). Pour cette raison, dans les comparaisons suivantes, les surfaces solide  $A_s$  et fluide  $A_f$  sont toujours égales entre géométrie cylindrique et hexagonale. Néanmoins, dans le cas où les profils de vitesse tangentielle sont pris au sommet de l'hexagone (Fig. 5.6b), le fluide accélère en proximité de la paroi. Cette accélération est due à la formation de tourbillons au niveau des arêtes vives de l'hexagone au cours de l'oscillation.

La Figure 5.7 montre les iso-valeurs de la vorticité dans les deux géométries, pour différents jeux. Les tourbillons sont plus évidents pour les faibles confinements (larges jeux) et à peine

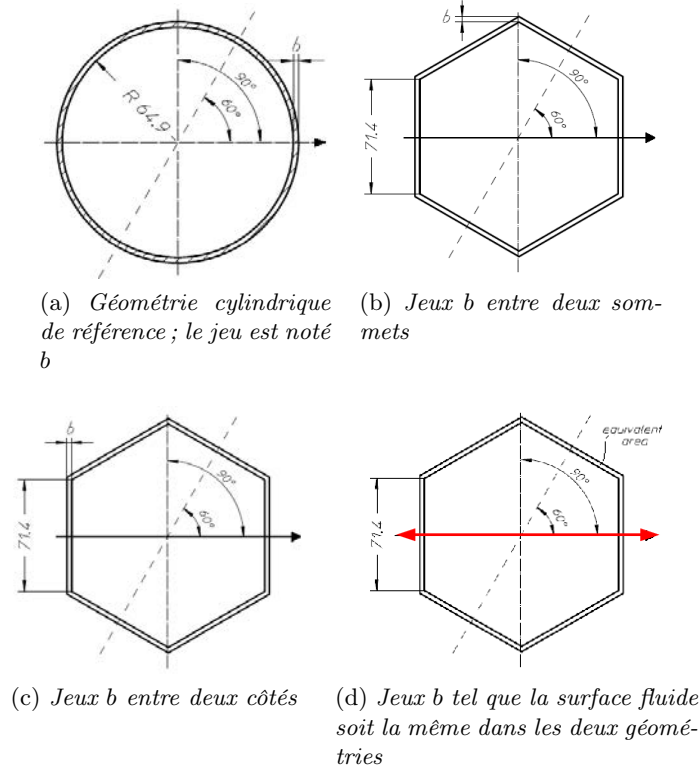


FIGURE 5.5 – Représentation géométrique des différentes définitions du jeu pour un corps hexagonal équivalent à un corps cylindrique

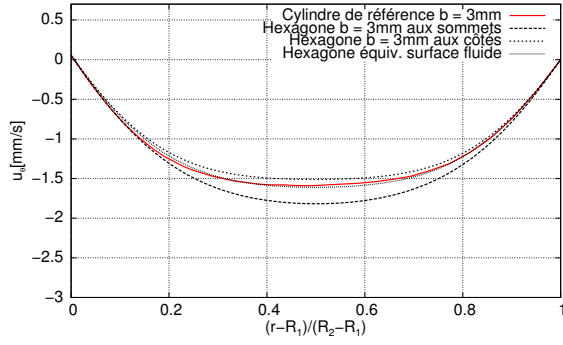
détectables pour les forts confinements (Fig. 5.7b et 5.7d). Pourtant, pour les très forts confinements (Fig. 5.8a), le pic de vitesse est distribué sur environ tout le jeu. En revanche, pour un jeu dix fois plus élevé, il reste confiné dans une région proche du sommet (Fig. 5.8c). Ceci est une conséquence des différents régimes d'écoulement qui apparaissent lorsque le confinement ou la fréquence varient (Fig. 5.8), comme déjà vu pour la géométrie cylindrique.

En raison du fait que l'hexagone a deux axes de symétrie, l'influence de l'orientation de l'hexagone par rapport à l'axe de déplacement a été examinée. Nous avons considéré un hexagone avec la même géométrie mais tourné de  $30^\circ$  par rapport à la direction du déplacement  $X$  (Fig. 5.9). Nous définissons la configuration de la Fig. 5.9a comme Géométrie 1 et celle de la Fig. 5.9b comme Géométrie 2. Les profils de vitesse tangentielle dans les deux configurations sont comparés sur la Fig. 5.9c. Nous constatons que les profils tournés de  $30^\circ$  se superposent parfaitement. Ceci implique que le champ de vitesse intégré sur la surface ne varie pas en fonction de la direction du mouvement de l'hexagone. Nous démontrons, donc, que la force fluide dans les deux configurations est la même.

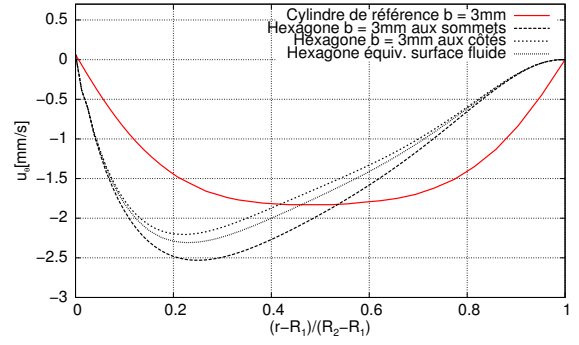
### 5.1.2.2 Comparaison des coefficients de masse ajoutée $C_M$

Pour évaluer l'influence de la géométrie sur les effets inertiels, nous avons calculé le coefficient de masse ajoutée  $C_M$  pour une géométrie hexagonale. Pour ce faire, nous avons utilisé les méthodes déjà décrites dans le Paragraphe 5.1.1.2.

Ensuite, les valeurs du coefficient  $C_M$  pour la géométrie hexagonale ont été comparées à celles de la géométrie cylindrique. Nous avons imposé des surfaces solide et fluide équivalentes, où  $R_2/R_1$



(a) Axe à  $\alpha = 60^\circ$  par rapport au déplacement (milieu du côté)



(b) Axe à  $\alpha = 90^\circ$  par rapport au déplacement, calé sur un sommet de l'hexagone

FIGURE 5.6 – Comparaison des profils de vitesse tangentielle  $u_\theta$  entre cylindre et hexagone pour des définitions différentes du jeu

représente le rapport de rayons équivalents à la configuration cylindrique.

La Figure 5.10a montre que le coefficient  $C_M$  pour un hexagone est un peu plus grand que dans le cas d'un cylindre. Ceci est une conséquence des modifications du champ de vitesse provoquées par la géométrie hexagonale. En effet, les tourbillons aux sommets de l'hexagone causent une augmentation de l'énergie cinétique du fluide par rapport à celle d'un corps cylindrique. La différence entre les deux géométries est plus évidente lorsque le jeu diminue (Fig. 5.10c). Néanmoins, les valeurs restent semblables et comparables (Fig. 5.10b).

Une dernière comparaison du coefficient de masse ajoutée a été effectuée avec le modèle numérique développé, pour la géométrie hexagonale, par Chung et Chen [9]. Ce modèle se fonde sur un écoulement potentiel. Les résultats obtenus par ce modèle numérique et « Cast3M Navier-Stokes » se trouvent en très bon accord avec la solution fournie par Chung et les essais expérimentaux de Fujita [21]. Ceci confirme que le modèle numérique est capable de reproduire un écoulement bidimensionnel autour d'un hexagone oscillant.

### 5.1.2.3 Comparaison des coefficients d'amortissement ajouté $C_D$

De la même façon que pour le coefficient de masse ajoutée, nous avons cherché à évaluer les effets géométriques sur le coefficient d'amortissement ajouté  $C_D$ . Les valeurs obtenues ont été calculées à partir de l'expression de la force fluide en phase avec la vitesse, comme cela a été fait pour la géométrie cylindrique (Éq. 5.1 et 5.1). Les variations du coefficient d'amortissement ajouté en fonction du rapport  $R_2/R_1$  (rapport des rayons équivalents à la configuration cylindrique) sont indiquées sur la Fig. 5.12. Les deux courbes de référence sont données pour des fréquences d'oscillation respectives de 1 et 10 Hz. Nous pouvons constater que le coefficient d'amortissement ajouté, pour une géométrie hexagonale, est plus élevé que pour une géométrie cylindrique. La différence est plus évidente lorsque la fréquence d'oscillation augmente. En effet, pour  $f = 10$  Hz, le coefficient  $C_D$  est d'un ordre de grandeur plus élevé que pour le cas cylindrique correspondant. Pour des fréquences plus faibles, la différence subsiste (Fig. 5.12b) à un niveau de l'ordre de 10%. Donc, les effets géométriques ont un fort impact sur le coefficient d'amortissement ajouté. Ceci peut être expliqué par la formation de tourbillons, typiques de la géométrie hexagonale. Pour cette géométrie, même si la valeur de l'intégrale de l'énergie cinétique dans la zone fluide

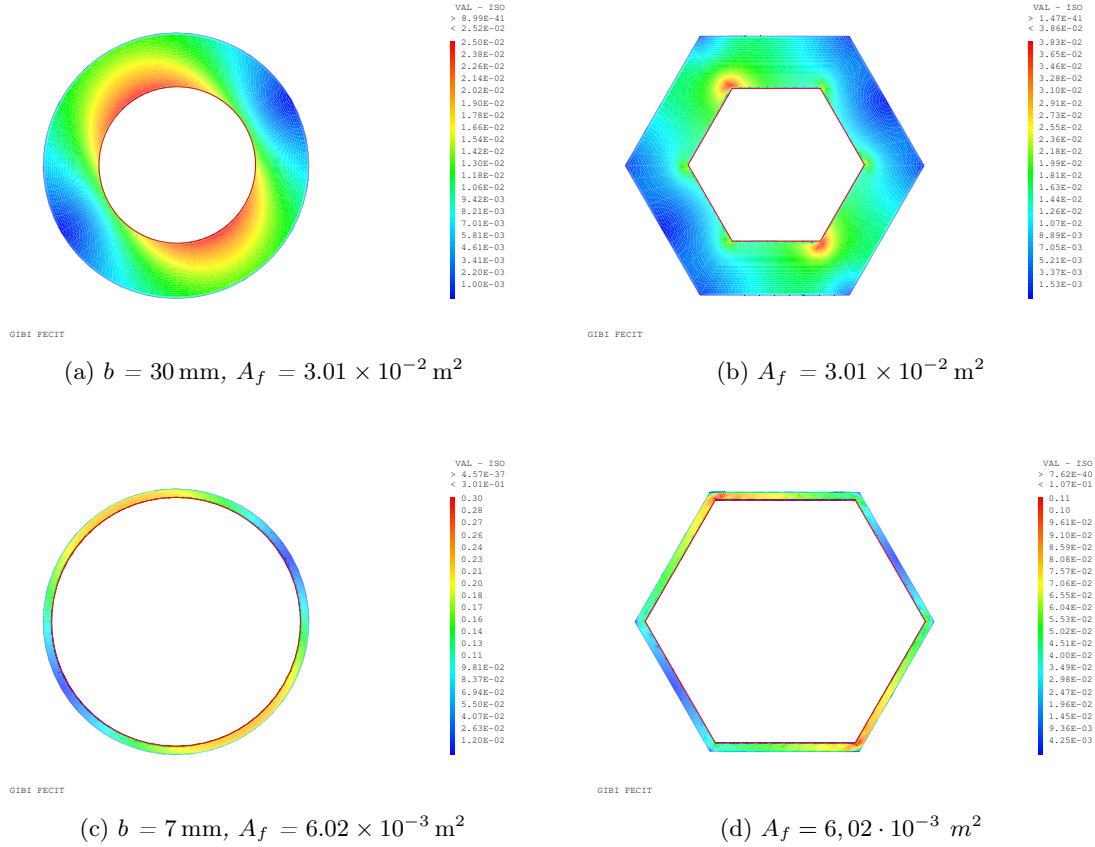


FIGURE 5.7 – Iso-valeurs de vorticité pour une fréquence d’oscillation de  $f = 1 \text{ Hz}$

augmente légèrement, les effets de l’amortissement, dus à la présence des tourbillons, sont plus importants et ils conduisent à des valeurs plus élevées du coefficient  $C_D$ . Comme la vitesse des tourbillons est liée à la fréquence, plus la fréquence est élevée, plus l’effet d’amortissement est élevé.

#### 5.1.2.4 Conclusions concernant la comparaison entre géométries cylindrique et hexagonale

Dans cette partie, une analyse de la géométrie hexagonale en déplacement forcé a été réalisée. Au début, nous avons cherché la meilleure façon de comparer un hexagone et un cylindre, afin d’avoir la même force fluide sur la structure. Le choix a été de conserver la même surface de section pour le fluide et le solide.

La comparaison des profils de vitesse a révélé l’apparition de tourbillons derrière les arêtes vives de l’hexagone. Ce phénomène est plus important lorsque le confinement est faible. Comme pour le cylindre, différents régimes d’écoulement apparaissent suivant le niveau du confinement et de la valeur du nombre de Stokes. En conséquence des champs de vitesse modifiés, les coefficients de masse ajoutée sont plus élevés par rapport à la géométrie cylindrique. La même conclusion peut être déduite pour le coefficient d’amortissement ajouté. Néanmoins, alors que entre le coefficient de masse ajoutée cylindrique et hexagonale une correspondance peut être encore observée, pour l’hexagone les tourbillons provoquent un amortissement ajouté plus élevé que pour le cylindre.

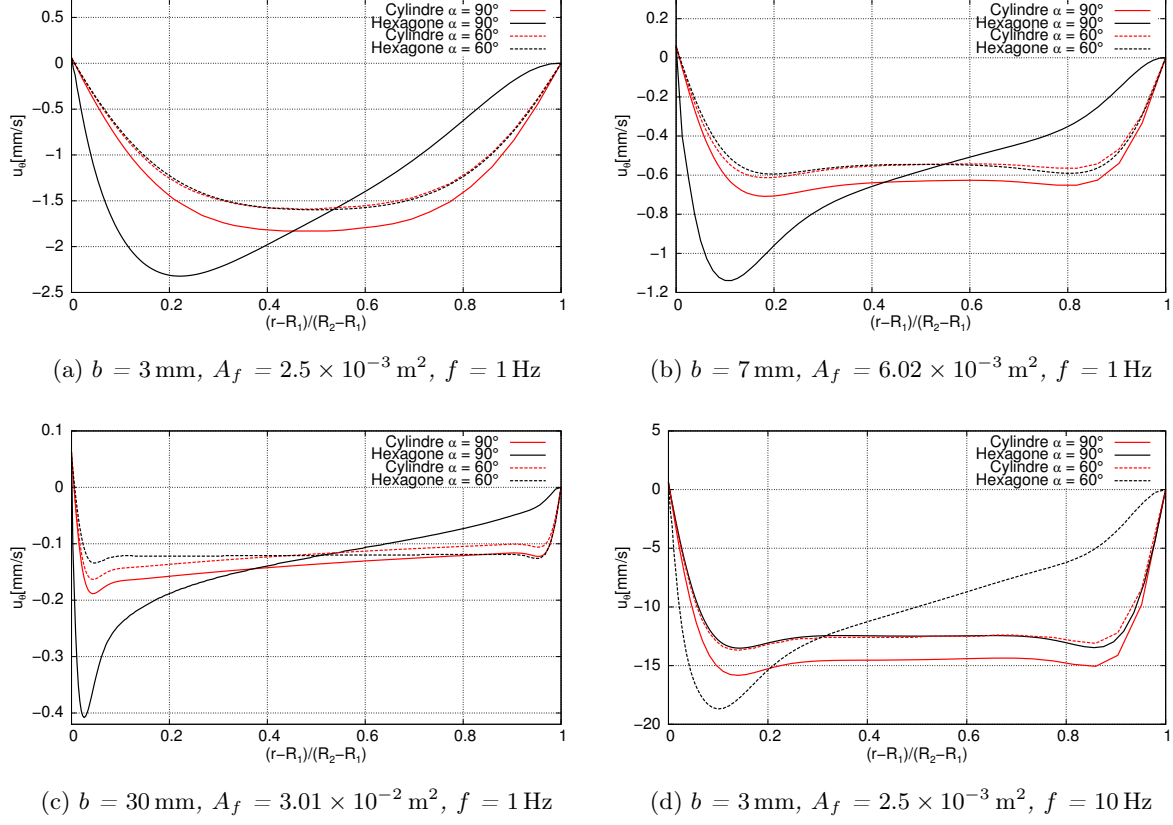


FIGURE 5.8 – Comparaison des profils de vitesse tangentielle  $u_\theta$  entre hexagone et cylindre pour différents jeux et fréquences

## 5.2 Mouvement libre : validation du modèle numérique 2D en géométrie cylindrique et application à la géométrie hexagonale

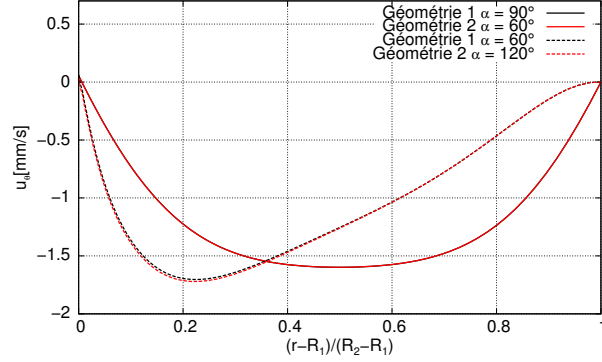
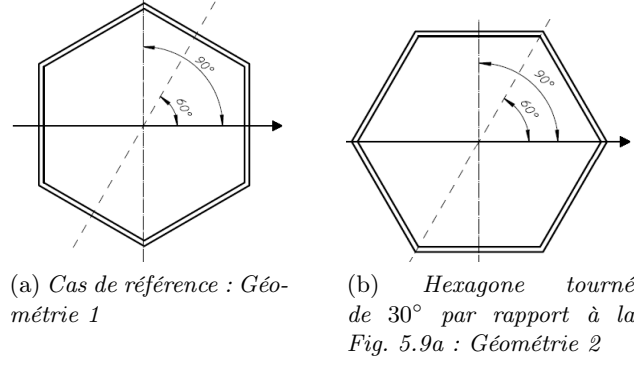
Nous présentons, dans ce qui suit, la validation du modèle numérique 2D « Cast3M Navier-Stokes » (Chapitre 4) dans le cas d'un solide en oscillation libre avec un seul degré de liberté, dans un fluide incompressible et visqueux. La comparaison avec la solution analytique développée dans la Section 3.2 pour de très forts confinements a été effectuée, montrant un bon accord. Une comparaison avec le modèle « Cast3M  $up\phi$  » a également été réalisée.

En premier lieu, les deux méthodes ont été testées pour la convergence et, ensuite, confrontées. Les valeurs des coefficients de masse ajoutée et d'amortissement ajoutée trouvées sont comparées avec la solution de Chen [8]. Ensuite, nous vérifions l'effet de la géométrie sur l'écoulement fluide et le déplacement de la structure, en comparant hexagone et cylindre.

### 5.2.1 Comparaison du modèle « Cast3M Navier-Stokes » avec la solution analytique et le modèle « Cast3M $up\phi$ » pour le cas d'oscillations libres

Considérons le même problème que celui posé dans la Section 3.2 et prenons comme référence la Fig. 3.1 : deux cylindres concentriques de longueur infinie, dont les rayons sont respectivement  $R_1$  et  $R_2$ . Le jeu entre les deux cylindres  $b = R_2 - R_1$  est rempli d'un fluide de masse volumique





(c) Comparaison des profils de vitesse tangentielle  $u_\theta$  pour différents angles par rapport à l'axe de déplacement

FIGURE 5.9 – Effets de l'orientation de l'hexagone pour le même axe de déplacement

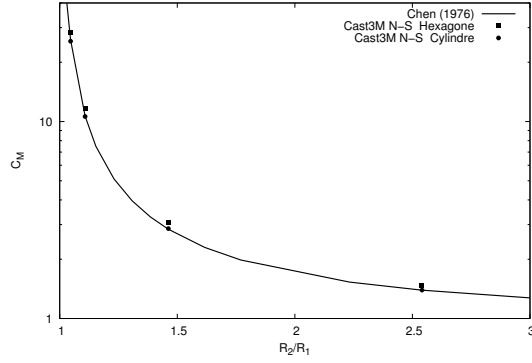
$\rho$  et de viscosité cinématique  $\nu$ . Le cylindre extérieur est fixe, tandis que le cylindre intérieur vibre à partir d'un déplacement initial  $a_0$  parallèle à l'axe  $X$ . L'amplitude de l'oscillation libre en fonction du temps  $a(t)$  est l'inconnue du système [40]. Les caractéristiques géométriques et les propriétés du fluide sont les mêmes que dans le cas du déplacement forcé et elles sont résumées dans le Tab. 5.2. Le cylindre est maintenant modélisé comme un système masse-ressort amorti, à un seul degré de liberté, de masse  $m_s$ , de raideur  $k_s$ , dans un domaine fluide confiné 2D. Afin d'évaluer plus précisément les effets de l'amortissement dûs au fluide, nous fixons le coefficient d'amortissement de la structure  $c_s$  égal à zéro.

Comme le modèle analytique n'est valide que pour de petites amplitudes initiales d'oscillation, nous avons retenu, pour le déplacement initial  $a_0$ , des valeurs comprises entre 1/100 et 1/30 du jeu. Le coefficient de raideur de la structure est fixé en fonction de la fréquence en air sélectionnée.

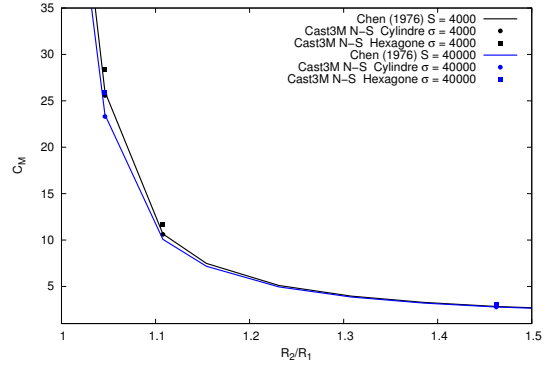
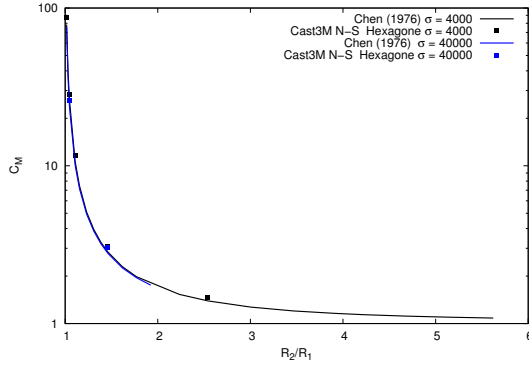
### 5.2.1.1 Convergence du modèle « Cast3M Navier-Stokes »

Le modèle « Cast3M Navier-Stokes » a d'abord été testé pour vérifier sa convergence en temps et en espace.

Un maillage très fin est nécessaire pour capter les couches limites près des parois. Le nombre de mailles dans le jeu a été fixé de telle sorte que le bilan d'énergie dans le système soit satisfait. Si ce bilan n'est pas respecté, une partie de l'énergie est renvoyée sous-forme de force fluide dans l'équation de la quantité de mouvement de façon à rééquilibrer le système.



(a)  $f = 1$  Hz



(b) Comparaison pour différents nombres de Stokes

(c) Comparaison pour très forts confinement et différents nombres de Stokes

FIGURE 5.10 – Comparaison des valeurs du coefficient de masse ajoutée  $C_M$  en fonction du confinement entre hexagone et cylindre

L'énergie initiale du système,  $E_0$ , correspond à l'énergie potentielle de la structure résultant du déplacement initial  $a_0$ . Cette énergie est partiellement transformée en énergie cinétique  $E_{cs}$  et énergie potentielle  $E_{ps}$  de la structure, tandis que le reste est transféré au fluide sous forme d'énergie cinétique  $E_{cf}$  et d'énergie dissipée  $E_{dis}$ . L'énergie totale de la structure est définie comme  $E_{ts}$ . Par conséquent, l'énergie mécanique du système  $E_{mec}$  doit diminuer avec le temps. Le bilan de l'énergie totale du système est donné par :

$$E_0 = E_{ps}(t) + E_{cs}(t) + E_{cf}(t) + E_{dis}(t) = E_{mec}(t) + E_{dis}(t)$$

Ces termes sont définis comme suit :

- $E_0 = \frac{1}{2}ka_0^2$
- $E_{ps} = \frac{1}{2}ka^2(t)$
- $E_{cs} = \frac{1}{2}m\dot{a}^2(t)$
- $E_{ts} = E_{ps} + E_{cs}$

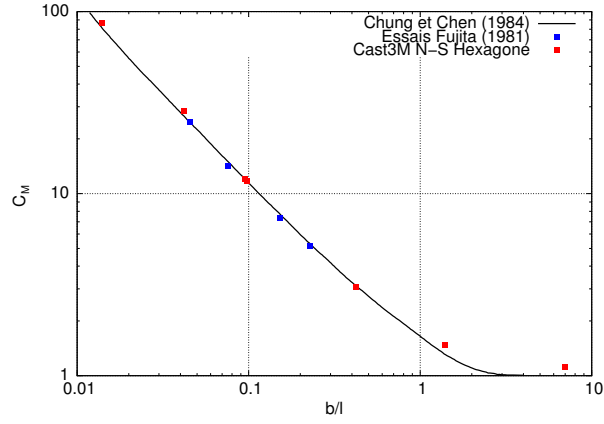


FIGURE 5.11 – Comparaison avec la solution de Chung et Chen [9] des valeurs du coefficient de masse ajoutée pour l'hexagone

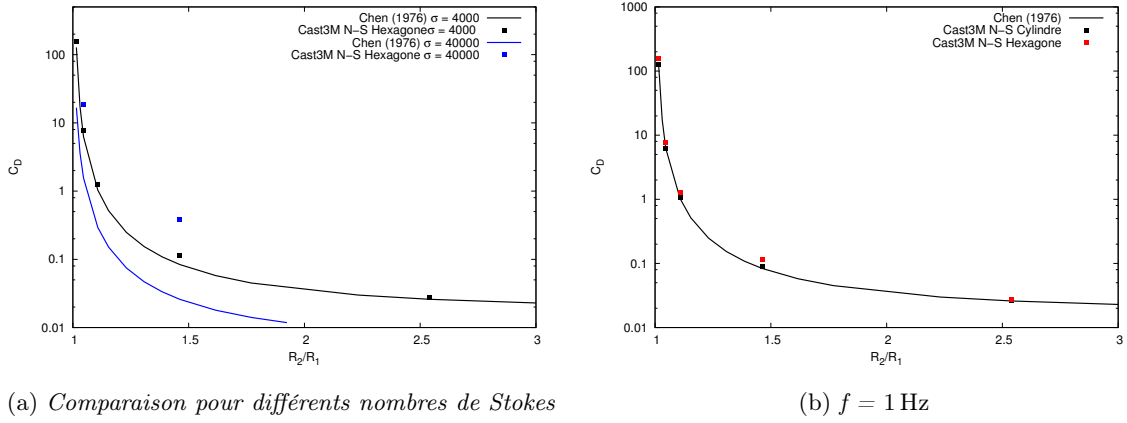


FIGURE 5.12 – Comparaison entre cylindre et hexagone du coefficient d'amortissement ajouté  $C_D$  en fonction du confinement pour différentes fréquences de vibration

- $E_{cf} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho |\vec{u}(x, y, t)|^2 d\Omega$
- $E_{mec} = E_{ts} + E_{cf}$
- $E_{dis} = \int_0^t \int_{\Omega} 2\mu \sum_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} D_{ij} dAdt \quad \text{où :} \quad D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$

L'évolution de l'énergie mécanique totale  $E_{mec}$  calculée et de ses composantes est présentée en Fig. 5.13. L'énergie potentielle commence à diminuer dès que le cylindre se déplace vers la position d'équilibre tandis que l'énergie mécanique totale diminue. Une partie de l'énergie potentielle perdue par le solide se transforme en énergie cinétique pour la structure et le fluide ; une autre partie est dissipée par viscosité sous forme d'énergie visqueuse  $E_{dis}$ .

Afin de vérifier le respect du bilan d'énergie, l'énergie dissipée  $E_{dis}$  et l'énergie mécanique  $E_{mec}$  doivent être complémentaires pour obtenir l'énergie totale initiale  $E_0$ . En effet, l'évolution dans le temps de l'énergie mécanique se superpose à la différence entre l'énergie initiale et celle dissipée.

Pour obtenir un bilan respecté comme celui présenté, il est également nécessaire de raffiner en

$R_1$ [mm]	64.9
b [mm]	1, 3, 7
$a_o$	0.03
$m_s$ [kg/m]	50, 100
$c_s$ [kg s <sup>-1</sup> ]	0
$f_{air} = \sqrt{k_s/m_s}$ [Hz]	1, 10
$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	1000
$\nu$ [m <sup>2</sup> /s]	10 <sup>-6</sup>

TABLE 5.2 – Caractéristiques géométriques et propriétés du fluide

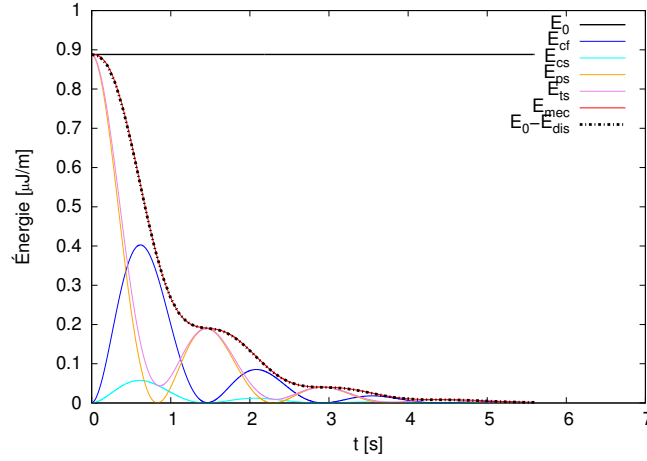


FIGURE 5.13 – Évolution dans le temps de l'énergie du système pour un mouvement d'oscillation libre

temps. Sur la Fig. 5.14, nous montrons les effets du pas de temps  $dt$  : le bilan d'énergie est respecté d'autant mieux que la discrétisation en temps est fine. Pour améliorer les performances et la précision du calcul, il faudrait faire des itérations internes à chaque pas de temps sur l'équation de quantité de mouvement fluide pour résoudre les non-linéarités. L'utilisation d'un schéma numérique d'ordre deux en temps améliore aussi la vérification du bilan d'énergie. Finalement, les valeurs utilisées dans les calculs pour le nombre de mailles dans le jeu et le pas de temps sont, respectivement, 20 mailles/mm et 1/1000 s.

### 5.2.1.2 Convergence du modèle 2D « Cast3M $up\phi$ »

Pour tester la convergence du modèle « Cast3M  $up\phi$  », nous avons effectué une analyse de sensibilité concernant le nombre de mailles azimutales (le long le périmètre) pour une géométrie cylindrique. La Fig. 5.15 représente l'évolution de la fréquence en fonction du nombre de mailles azimutales avec une maille dans le jeu. Nous obtenons la fréquence prédite de la théorie de Fritz [20] avec 20 mailles par côté avec une erreur inférieure à 1%.

En revanche, ce modèle semble être assez peu sensible au nombre de mailles dans l'espace fluide. La variation de la fréquence entre 1 et 50 mailles dans le jeu est de l'ordre du 0.01%, pour un nombre des mailles azimutales fixé.

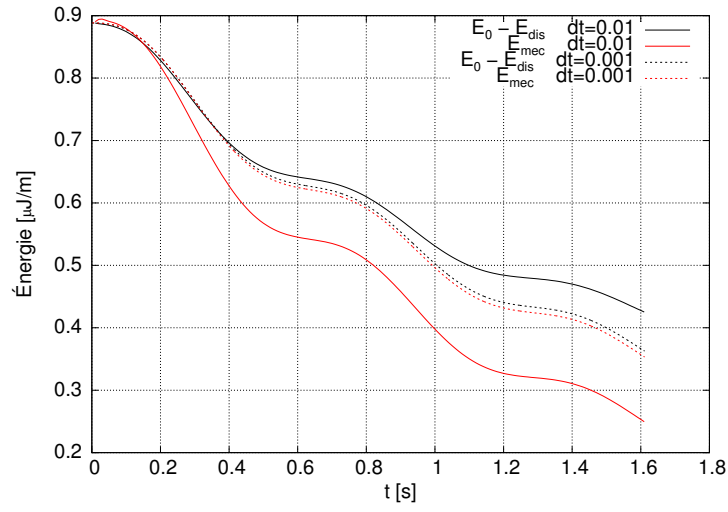


FIGURE 5.14 – Effets du pas de temps sur la précision du calcul sur la base du respect du bilan d'énergie du système

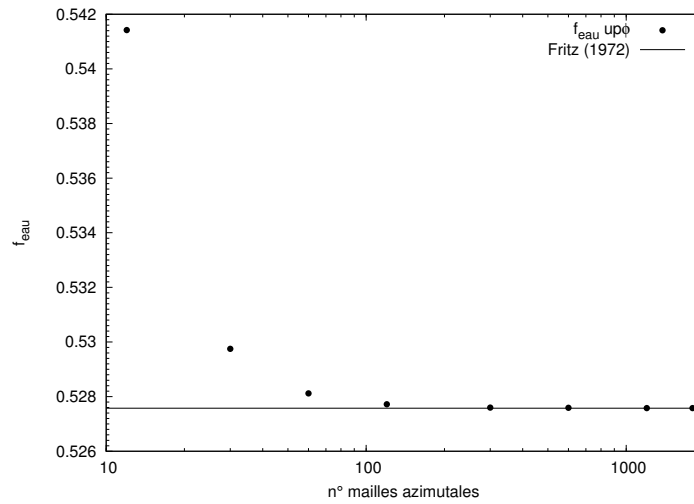


FIGURE 5.15 – Convergence en maillage du modèle  $up\phi$  : sensibilité au nombre de mailles azimutales

### 5.2.1.3 Évaluation du coefficient de masse ajoutée $C_M$ et du coefficient d'amortissement $C_D$

Dans cette section, nous cherchons une méthode pour évaluer les coefficients de masse et d'amortissement ajoutés dans le cas de vibrations libres. La définition de la masse ajoutée  $M_{add}$  donnée dans le Section 5.1 a été réutilisée (Éq. 4.4). La Fig. 5.16 montre que l'évolution dans le temps de la masse ajoutée tend à se stabiliser à une valeur constante, qui sera considérée comme la valeur de  $M_{add}$ . Pour ce qui concerne le coefficient d'amortissement ajouté  $C_D$ , nous supposons que la

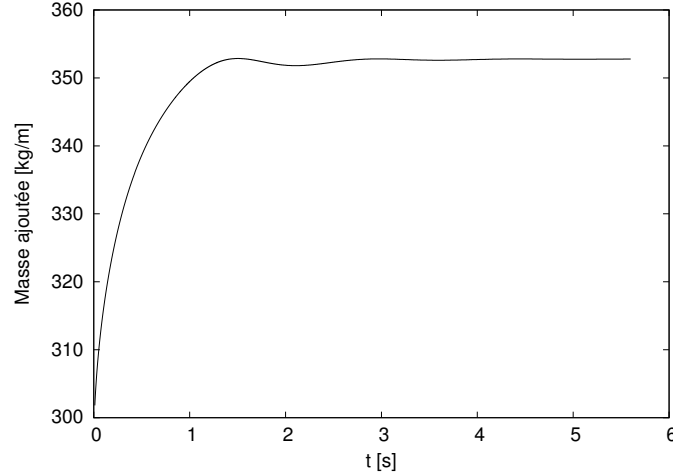


FIGURE 5.16 – Évolution de la masse ajoutée dans le temps

force fluide peut être décomposée en deux parties comme pour le déplacement forcé (Éq. 5.1). La composante en phase avec la vitesse du solide est liée à l'amortissement du système. Avec cette hypothèse, l'équation de la dynamique de la structure peut s'écrire :

$$(m_s + M_{add})\ddot{a}(t) + (c_s + C_D)\dot{a}(t) + ka(t) = 0$$

L'équation précédente est équivalente à l'équation homogène pour une structure vibrante dont la masse totale est  $m_s + M_{add}$ , le coefficient d'amortissement total étant égal à  $c_s + C_D$  et la raideur à  $k$ . En conséquence, le taux d'amortissement  $\xi$  est :

$$\xi = \frac{c_s + C_D}{c_{cr}} = \frac{c_s + C_D}{2\sqrt{(m_s + M_{add})k}} \quad (5.3)$$

Nos problèmes de vibration produisent des déplacements sous-amortis, où les paramètres physiques sont tels que  $0 < \xi < 1$ . Donc, l'équation de la dynamique de la structure peut être écrite comme suit :

$$a(t) = a_0 e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\sqrt{1 - \xi^2} \omega_0 t + \phi)$$

où  $\phi$  est le déphasage et  $a_0$  dépend des conditions initiales. Par ailleurs, la pulsation de l'oscillation  $\omega$  et la fréquence angulaire naturelle  $\omega_0$  répondent aux définitions suivantes :

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \quad \text{où} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_s + M_{add}}} \quad (5.4)$$

Dans nos calculs, la valeur de l'amortissement de la structure  $c_s$  est nul. En conséquence, l'amortissement est exclusivement dû au fluide.

Trois méthodes pour évaluer le  $C_D$  ajouté à partir des résultats de nos calculs ont été considérées :

- $C_1$ , à partir du décrement logarithmique de l'amplitude du déplacement du solide ;
- $C_2$ , à partir de la fréquence angulaire de d'oscillation du solide (Éq. 5.4) ;
- $C_3$ , à partir de l'énergie dissipée  $E_{dis}$  au cours de la période de calcul  $\tau$  (Éq. 5.5).

$$C_3 = \frac{E_{dis}(\tau)}{\int_0^\tau \dot{a}^2(t) dt} = \frac{E_0 - E_{mec}(\tau)}{\int_0^\tau \dot{a}^2(t) dt}. \quad (5.5)$$

Pour faire une comparaison de ces méthodes, les valeurs obtenues pour le coefficient d'amortissement ajouté ont été utilisées pour trouver l'énergie dissipée comme suit :

$$E_{Ci} = \int_0^a C_i \dot{a}(t) dx = \int_0^t C_i \dot{a}^2(t) dt \quad i = 1, 2, 3$$

La comparaison entre l'évolution de l'énergie dissipée par le fluide obtenue par « Cast3M Navier-Stokes » et celle trouvée avec  $C_1$ ,  $C_2$  ou  $C_3$ , est effectuée sur la Fig. 5.17. L'évolution obtenue par le décrement logarithmique est la plus proche du calcul numérique. Si le calcul a bien convergé, la solution trouvée avec  $C_1$  est équivalente à celle trouvée avec  $C_3$ . En revanche, la méthode liée à  $C_2$  est sensible aux erreurs d'arrondi. Ensuite, nous avons

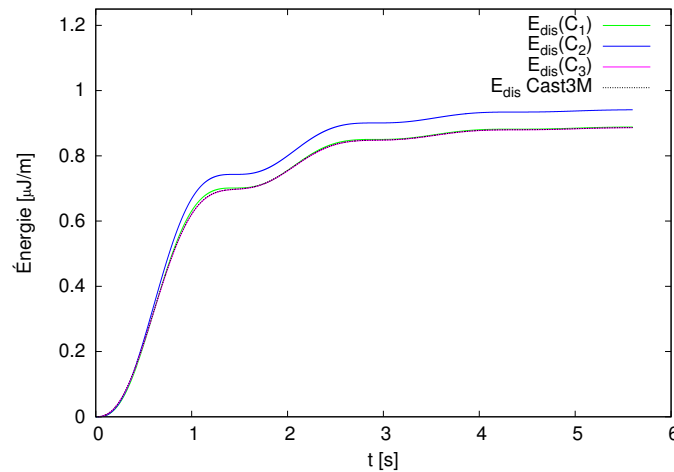


FIGURE 5.17 – Comparaison entre l'évolution de l'énergie dissipée par le fluide obtenue par le calcul « Cast3M Navier-Stokes » et celle trouvée avec  $C_1$ ,  $C_2$  ou  $C_3$

comparé la force fluide  $F_f$  obtenue par le modèle Cast3M avec la force fluide  $F_{f_{com}}$  trouvée avec l'Équation 5.1. La Figure 5.18 montre cette comparaison. Excepté pour le début où la force fluide dérivant du calcul présente un pic (voir Chapitre 5.1), une parfaite correspondance est visible.

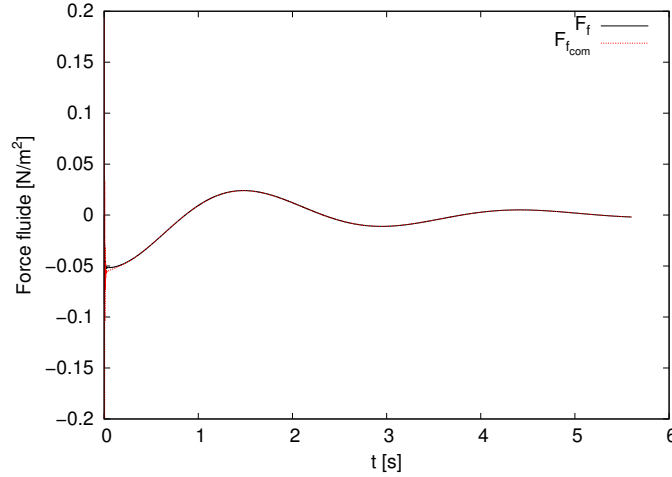


FIGURE 5.18 – Comparaison de la force fluide trouvée par « Cast3M Navier-Stokes » et par la formulation associée à  $C_M$  et  $C_D$

#### 5.2.1.4 Comparaison des déplacements, fréquences et taux d'amortissement avec la solution analytique et le modèle « Cast3M $up\phi$ »

La Figure 5.19 montre l'évolution dans le temps du déplacement du cylindre pour des masses linéiques de 50 et 100 kg/m et des fréquences en air de 1 et 10 Hz. Un parfait accord entre les résultats analytiques (Éq. 3.8) et numériques « Cast3M Navier-Stokes » est obtenu. En revanche, les simulations faites avec le modèle « Cast3M  $up\phi$  » montrent de légers écarts, surtout pour des fréquences en air plus élevées (Fig. 5.19c et 5.19d). L'écart dérive du fait que ce modèle se base sur l'approximation de fluide parfait, les effets visqueux étant négligés. Néanmoins, pour un jeu de 1 mm, ces effets sont assez importants et ils contribuent à l'énergie cinétique du système (voir Section 3.1). Dans le modèle « Cast3M  $up\phi$  », le seul moyen de prendre en compte les effets dissipatifs est de les rajouter forfaitairement par l'amortissement de Rayleigh  $C_{Ray}$ . Celui-ci est imposé pendant le calcul par deux coefficients  $\lambda$  et  $\mu_R$ , respectivement liés à la masse et à la raideur du système (Éq. 4.6). Pour cela, des valeurs *ad hoc* de ces coefficients ont été choisies pour obtenir les déplacements de la structure.

Le modèle « Cast3M Navier-Stokes » est capable de reproduire les cas où le déplacement solide est sur-amorti (Fig. 5.19a). La composante visqueuse de la force fluide permet d'obtenir directement le coefficient d'amortissement ajouté. Ceci confirme la capacité du modèle à capter la force fluide. La Figure 5.20 montre une comparaison entre les solutions numériques et analytiques pour les cas où le jeu est de 3 ou de 7 mm. Lorsque  $b$  augmente (et donc, le paramètre  $\eta = b/R_2$  qui représente le confinement augmente), la solution analytique s'écarte du déplacement calculé.

Comparer les deux résultats pour un jeu de 3 mm, comme pour PISE-2c, est encore acceptable, tandis que pour 7 mm, comme PISE-1a, le déphasage avec les modèles numériques devient important. Sur la Fig. 5.20a, les fréquences trouvées par le modèle « Cast3M Navier-Stokes » et la solution analytique sont très proches. En revanche, la fréquence calculée par le modèle  $up\phi$  s'écarte de la solution analytique d'environ 20% en raison des effets visqueux négligés. Nous résumons toutes les valeurs des fréquences et de taux d'amortissement dans le Tab. 5.3. Nous donnons aussi les valeurs des coefficients  $\lambda$  et  $\mu$  qui ont fourni les déplacements sur la Fig. 5.19a. Dans tous les cas traités, la solution numérique tend à surestimer l'amortissement.



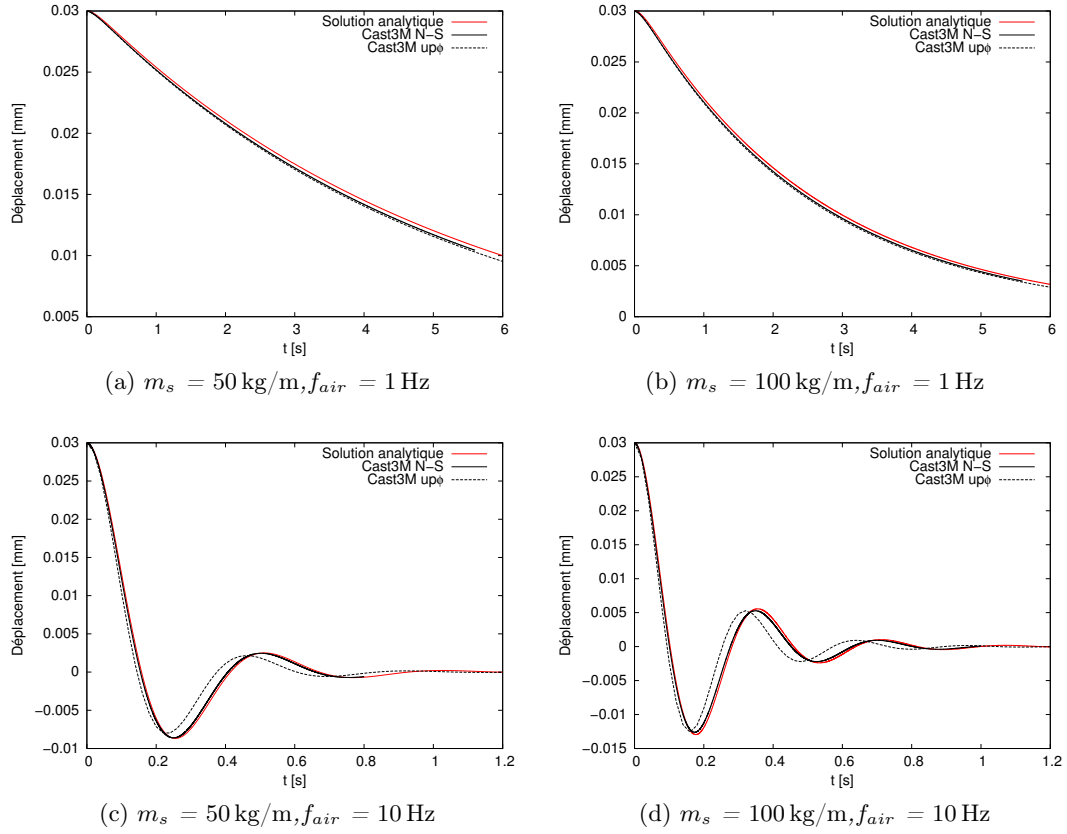


FIGURE 5.19 – Comparaison entre solution analytique et numérique du déplacement en fonction du temps pour un jeu fluide  $b = 1 \text{ mm}$

En effet, d'après les Fig. 5.20c et 5.20d, l'amplitude de l'oscillation est plus élevée pour la solution analytique que pour la solution numérique obtenue par « Cast3M Navier-Stokes ».

### 5.2.1.5 Analyse des champs de vitesse dans le jeu

Comme pour le mouvement imposé, nous examinons le régime d'écoulement du fluide établi pendant l'oscillation libre. Considérons un cylindre de masse linéique de  $50 \text{ kg/m}$  qui vibre en air à  $1$  ou  $10 \text{ Hz}$ . Les jeux considérés sont  $3, 7$  ou  $30 \text{ mm}$ . Les profils de vitesse tangentielle  $u_\theta$  à  $\theta = 90^\circ$  par rapport à l'axe de déplacement sont reportés sur la Fig. 5.21. Comme, dans une oscillation libre, l'intensité du champ de vitesse diminue jusqu'au repos, tous ces profils sont

TABLE 5.3 – Fréquences en eau  $f_{eau}$  et de taux d'amortissement  $\xi$  pour les déplacements de Figure 5.20

	Solution analytique		« Cast3M N-S »		$up\phi$		
	$f_{eau} \text{ [Hz]}$	$\xi$	$f_{eau} \text{ [Hz]}$	$\xi$	$f_{eau} \text{ [Hz]}$	$\lambda$	$\mu$
$f_{air} = 1 \text{ Hz}, b = 3 \text{ mm}$	0.319	22.54%	0.32	22.65%	0.38	1.3	0.001
$f_{air} = 1 \text{ Hz}, b = 7 \text{ mm}$	0.46	5.67%	0.51	5.35%	0.53	0.5	0.001
$f_{air} = 10 \text{ Hz}, b = 3 \text{ mm}$	3.66	5.92%	3.49	5.00%	3.82	3.0	0.001
$f_{air} = 10 \text{ Hz}, b = 7 \text{ mm}$	4.73	2.90%	5.06	1.51%	5.27	2.0	0.001

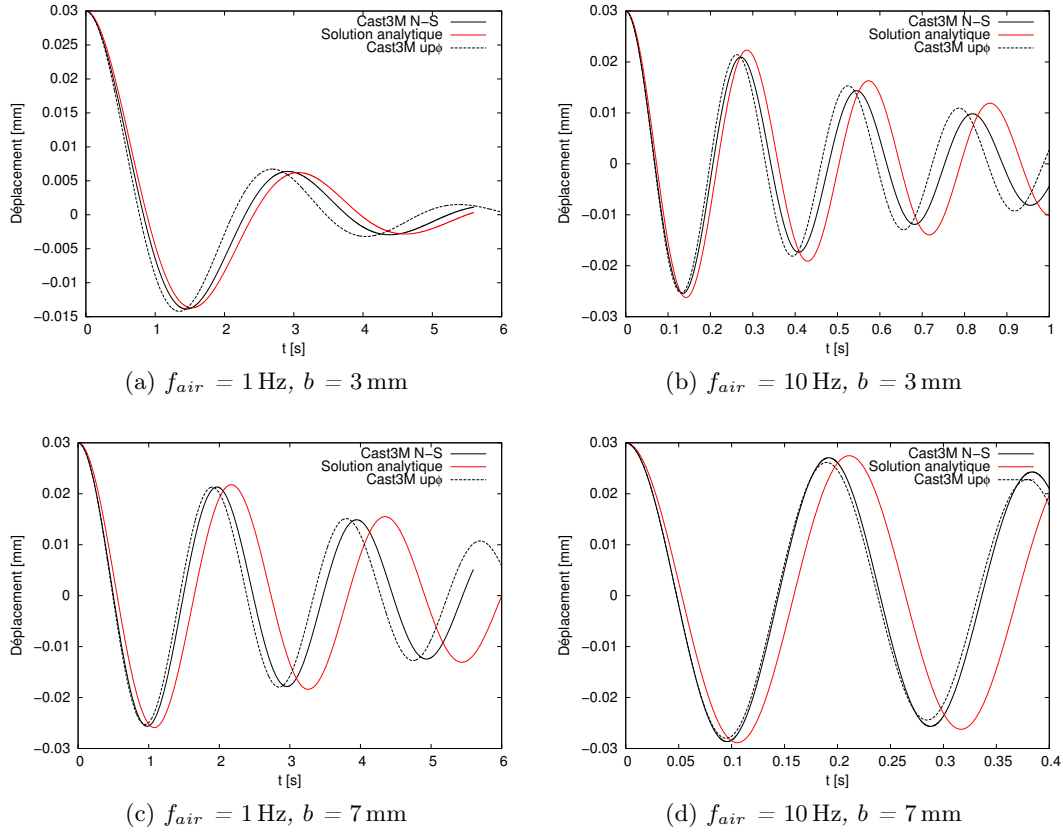


FIGURE 5.20 – Comparaison entre solution analytique et numérique « Cast3M Navier-Stokes » en fonction du temps pour différents jeux et pour une masse de 50 kg/m

considérés arbitrairement à  $t = 1$  s. Nous retrouvons les mêmes régimes d'écoulement que pour le mouvement imposé à jeu identiques. En Fig. 5.21d, augmenter la fréquence en air du solide produit le même effet qu'augmenter la fréquence dans le cas d'une oscillation imposée. En effet, dans les deux cas, il s'agit d'augmenter la constante de raideur  $k_s$  de la structure.

#### 5.2.1.6 Analyse des coefficients de masse ajoutée $C_M$ et d'amortissement ajouté $C_D$ pour la géométrie cylindrique

La Figure 5.22 présente la comparaison entre les modèles numériques « Cast3M  $up\phi$  » et « Cast3M Navier-Stokes » pour un mouvement libre du solide avec la solution de Chen valide pour un mouvement imposé. La fréquence en air du solide en oscillation libre est prise égale à la fréquence imposée pour le mouvement forcé; ceci permet d'avoir la même raideur de la structure dans les deux types d'oscillations. La valeur de la masse ajoutée est obtenue dans le calcul « Cast3M Navier-Stokes » comme décrit dans l'Éq. 4.4.

Le coefficient de masse ajoutée  $C_M$  est bien représenté par notre modèle. Pour le modèle « Cast3M  $up\phi$  », l'écart déjà vu pour les fréquences se traduit par un écart entre les masses ajoutées. Les tendances en fonction du rapport  $R_2/R_1$  sont similaires à celles des mouvements forcés : lorsque le jeu diminue,  $C_M$  et  $\xi$  augmentent fortement.

Le coefficient d'amortissement  $C_D$  a été obtenu seulement avec les calculs « Cast3M Navier-Stokes ». Bien que les valeurs calculées soient en bon accord avec la solution analytique, une erreur plus élevée est trouvée. De la même façon que pour l'analyse du mouvement imposé, cette

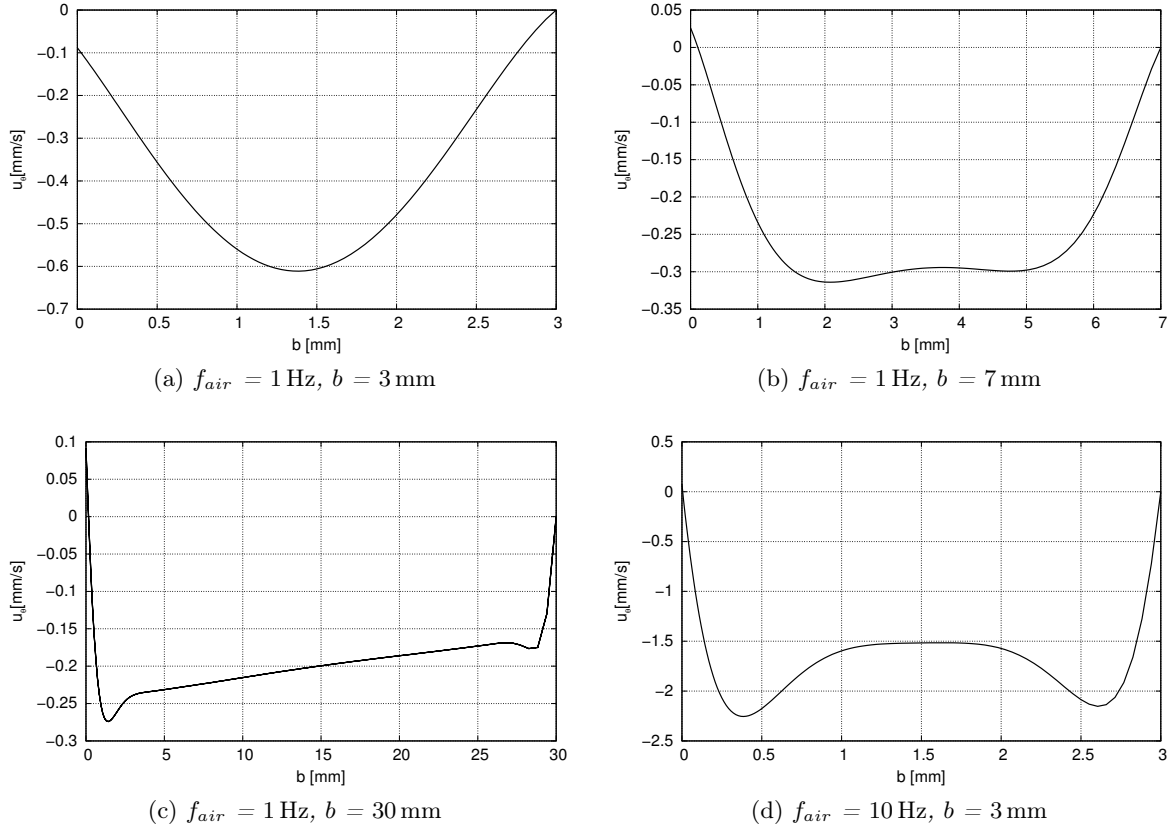


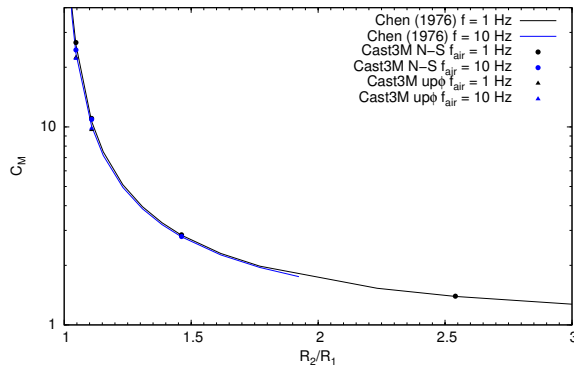
FIGURE 5.21 – Profils de vitesse tangentielle  $u_\theta|_{\theta=90^\circ}$  à  $t = 1$  s

erreur peut provenir d'erreurs d'arrondi dans notre post-traitement. Afin d'évaluer la dépendance des coefficients  $C_M$  et  $C_D$  en fonction des paramètres comme la fréquence en air de la structure et de sa masse, nous avons effectué une analyse de sensibilité avec « Cast3M Navier-Stokes ». Dans ce qui suit, nous utilisons le taux d'amortissement  $\xi$  pour tester les effets des paramètres sur l'amortissement ajouté. Le coefficient  $C_M$  et le taux d'amortissement  $\xi$  sont indiqués sur la Fig. 5.23, pour différents jeux, en fonction de la  $f_{air}$ . Une légère décroissance est visible pour la masse ajoutée. Comme augmenter la  $f_{air}$  implique que la structure devient plus raide, la force fluide diminue légèrement. En revanche, la variation de la fréquence en air influence fortement le taux  $\xi$  (Fig. 5.23b) : une structure plus raide est moins amortie. De plus, l'effet de  $f_{air}$  est plus marqué lorsque le jeu diminue.

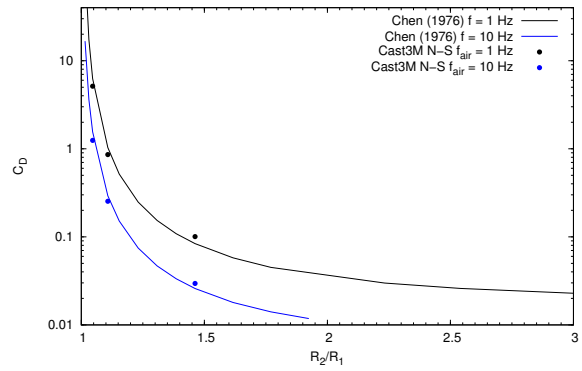
L'effet de la masse de la structure  $m_s$  est analysé pour les deux coefficients  $C_M$  et  $\xi$ . Sur la Fig. 5.24, cet effet sur la valeur de la masse ajoutée est presque négligeable. En revanche, la valeur du taux d'amortissement peut fortement varier avec  $m_s$ , surtout pour des faibles confinements. Lorsque la masse de la structure diminue,  $\xi$  augmente et le comportement de la structure se rapproche d'un régime amorti critique.

### 5.2.2 Analyse du coefficient de masse ajoutée $C_M$ et d'amortissement ajouté $C_D$ pour la géométrie hexagonale

Comme dans le cas des oscillations forcées, l'effet d'une géométrie hexagonale est analysé. De la même façon que pour le mouvement imposé, nous confrontons deux configurations qui ont la

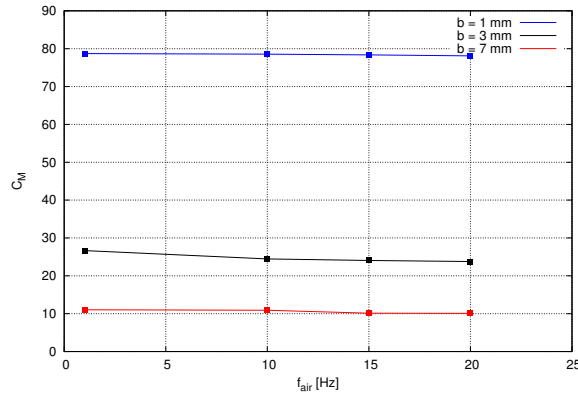


(a) Coefficient de masse ajoutée

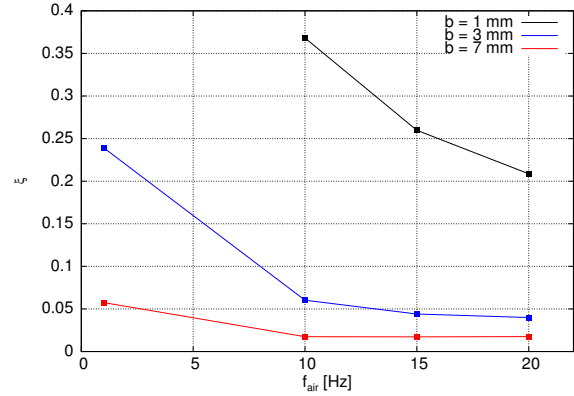


(b) Coefficient d'amortissement ajouté

FIGURE 5.22 – Comparaison des coefficients  $C_M$  et  $C_D$  donnés par la solution analytique de Chen pour mouvement imposé et des valeurs trouvées par « Cast3M Navier-Stokes » et « Cast3M  $up\phi$  » pour un mouvement libre et deux cylindres concentriques

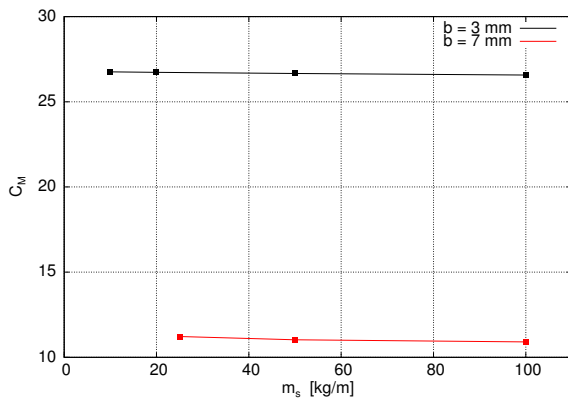


(a) Coefficient de masse ajoutée

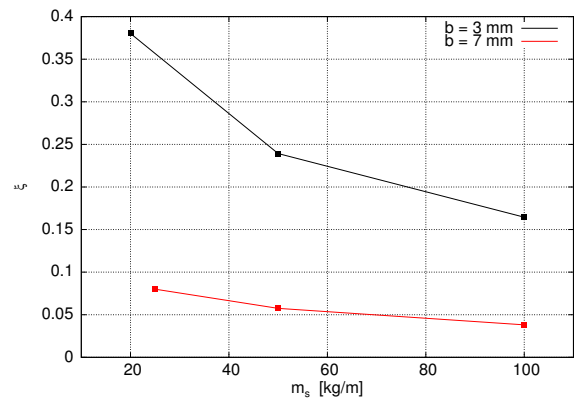


(b) Taux d'amortissement

FIGURE 5.23 – Comparaison du  $C_M$  et du  $\xi$  pour différents jeux en fonction de la fréquence de vibration en air



(a) Coefficient de masse ajoutée



(b) Taux d'amortissement

FIGURE 5.24 – Comparaison des coefficients  $C_M$  et du taux d'amortissement  $\xi$  pour différents jeux en fonction de la masse de la structure  $m_s$

même surface solide et fluide. Les coefficients de masse ajoutée et d'amortissement ajouté sont reportés sur la Figure 5.25. Il apparaît que l'hexagone subit une force fluide plus élevée que le

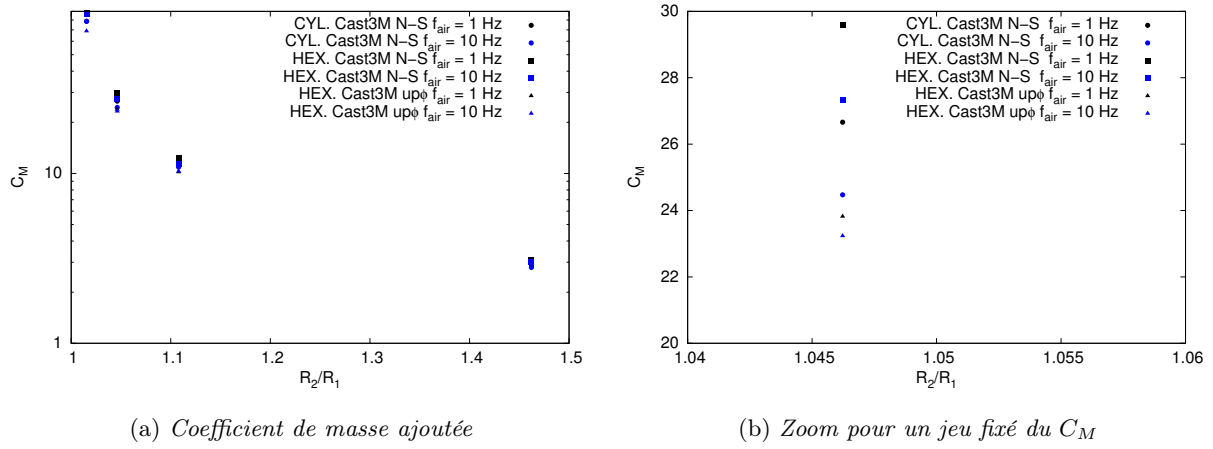


FIGURE 5.25 – Effets de la géométrie : comparaison des valeurs des coefficients  $C_M$  et  $C_D$  obtenues par les modèles « Cast3M Navier-Stokes » et  $up\phi$  pour deux hexagones concentriques et deux cylindres concentriques

cylindre. En fait, le coefficient  $C_M$  est plus important dans tous les cas traités avec « Cast3M Navier-Stokes ». En effet, à cause de la formation de tourbillons, l'énergie cinétique du fluide est supérieure dans le cas de l'hexagone comparé à celui du cylindre.

La Fig. 5.25b indique que la valeur donnée par le modèle  $up\phi$  est inférieure à celle donnée par « Cast3M Navier-Stokes ». Comme le modèle  $up\phi$  ne prend pas en compte les effets visqueux, une partie de l'énergie cinétique, et donc de la masse ajoutée, est perdue.

La même conclusion peut être tirée pour les effets d'amortissement. Néanmoins, pour les oscillations libres, les effets de la formation de vortex sur la valeur de l'amortissement ajouté est plus faible que pour les déplacements forcés.

### 5.2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons validé le modèle « Cast3M Navier-Stokes » (Chapitre 4) dans le cas d'un solide en oscillation libre avec un seul degré de liberté, dans un fluide incompressible et visqueux. Les comparaisons avec des solutions analytiques développées récemment et le modèle numérique  $up\phi$  pour fluide non-visqueux ont été effectuées. Elles montrent un bon accord pour

les fréquences et les valeurs du coefficient de masse ajoutée.

L'influence des différents paramètres a été étudiée : le confinement est le paramètre qui influence le plus la valeur de la force exercée par le fluide.

L'effet de la fréquence en air de la structure est plus important sur la valeur du taux d'amortissement que sur la masse ajoutée et il est plus marqué pour les petits jeux.

L'analyse de la structure avec différentes masses, mais une fréquence en air constante a été réalisée. Elle a montré que l'effet de l'inertie n'est pas très important, de sorte que la valeur de la masse ajoutée est pratiquement la même.

Le coefficient d'amortissement ajouté augmente légèrement pour des masses de structure croissantes.

Les effets de la géométrie hexagonale sont très similaires au cas de déplacement forcé. La formation de tourbillons au niveau des arêtes vives de l'hexagone conduit à une augmentation de l'énergie cinétique et, donc, de la masse ajoutée. Le taux d'amortissement est, pour la même raison, plus élevé et les fréquences en eau plus faibles.



## Troisième partie

# Présentation des maquettes et analyse expérimentale





## Description des installations expérimentales PISE-2c et PISE-1a et analyse des essais

Dans ce chapitre, nous présentons les installations expérimentales PISE-1a et PISE-2c, respectivement composées d'un assemblage hexagonale et de deux couronnes d'assemblages. La conception et le dimensionnement des maquettes sont exposés.

Ensuite, nous présentons les essais effectués avec la maquette mono-assemblage PISE-1a. Nous avons réalisé des oscillations libres en air ; puis, la même campagne d'essais a été reproduite en eau.

Les essais ont été modélisés avec le modèle « Cast3M Navier-Stokes » et le modèle « Cast3M *upφ* », déjà présentés dans le Chapitre 4.

### 6.1 Installations expérimentales : PISE-1a (mono-assemblage) et PISE-2c (2 couronnes)

#### 6.1.1 Conception de l'installation expérimentale

Notre installation expérimentale vise à simuler les phénomènes vibratoires des assemblages d'un cœur RNR-Na lors d'un séisme ou lors d'un AURN. Principalement, notre objectif est de comprendre l'interaction fluide-structure, notamment le transfert de quantité de mouvement entre les assemblages et le fluide, et de valider les approches numériques utilisées pour la modélisation. Il s'agit donc de réaliser la maquette d'une partie du cœur de Phénix, constituée d'assemblages hexagonaux séparés par 3 mm de jeu fluide. L'idée directrice de la conception est que chaque assemblage vibre en eau avec une fréquence du même ordre de grandeur de celle des assemblages de Phénix en sodium liquide lors d'un gerbage, estimée autour de quelques Hz [6]. Ceci permet aussi de respecter les ordres de grandeurs de l'échelle de temps des oscillations mesurées lors des AURNs.

Par rapport aux maquettes déjà existantes comme RAPSODIE ou SYMPHONY [3], nous avons réduit à 19 (2 couronnes) le nombre d'assemblages et chaque assemblage a été conçu afin que sa hauteur soit une fraction de celle d'un assemblage de Phénix. Ceci nous permet d'avoir une maquette plus compacte.

Pour obtenir un montage expérimental modulaire, chaque assemblage est constitué d'un élément hexagonal en PMMA fixé à un support déformable en acier inoxydable qui régit le mouvement.

Pour analyser l'écoulement dans les inter-assemblages, il est nécessaire de pouvoir le visualiser. En conséquence, chaque assemblage est en poly-méthacrylate de méthyle (PMMA) transparent. Puisque nous sommes intéressés par les phénomènes externes au DAC où il ne se produit pas de changement de phase, la maquette est plongée dans un écoulement monophasique liquide. Un système d'injection liquide [37, 38] est aussi à prévoir pour représenter les échelles de temps caractéristiques de l'expansion de la bulle de sodium dans le DAC. Cet ensemble doit permettre de réaliser des mesures PIV (Particle Image Velocimetry). L'ajustement de l'indice de réfraction entre le PMMA et l'eau permettant les mesures est obtenu par ajout d'Iodure de Sodium (NaI).

Comme nous voulons représenter une translation bidimensionnelle des assemblages (proche des mouvements sismiques) et un mouvement tridimensionnel (typique des AURNs), deux types de support sont prévus : une charnière bilame pour les oscillations bidimensionnelles et une charnière monolame pour les oscillations tridimensionnelles de type poutre encastree-libre. Les mouvements des assemblages seront provoqués par différents moyens : un déplacement initial pour les essais d'oscillation libre ou une pression initiale sur certains éléments due à l'injection du fluide par l'assemblage central. Il est prévu de mesurer les déplacements en tête et en bas de l'élément hexagonal, la pression et la vitesse dans l'inter-assemblage.

### 6.1.2 Dimensionnement de l'assemblage bilame

L'assemblage bilame a comme but de vibrer à la fréquence cible de 2-3 Hz avec un jeu d'eau de 3 mm [6] en simulant le mouvement d'un séisme dans le cœur de Phénix. En conséquence, l'assemblage est censé se déplacer parallèlement à sa propre génératrice par un mouvement de translation dans la section transversale. Pour obtenir ce type de déplacement, l'élément hexagonal en PMMA est installé sur un support en acier inoxydable composé par deux lames verticales. Le premier mode vibratoire de ce support est horizontal et perpendiculaire aux lames (Fig. 6.1b).

La particularité du cœur de Phénix, et d'une manière plus générale d'un cœur RNR-Na, est la faible épaisseur du jeu de fluide par rapport aux dimensions dans le plan transversal des assemblages. La longueur du côté de l'hexagone étant d'un ordre de grandeur supérieur que l'épaisseur de l'inter-assemblage, il en résulte des effets inertiels très importants dans fluide. Ces effets, représentés par la masse ajoutée  $M_{add}$  [8, 20], influencent fortement la fréquence propre du système. Notamment, la fréquence vibratoire d'un solide en milieu confiné est plus élevée que celle en milieu infini et elle croît inversement proportionnelle avec la diminution de l'épaisseur fluide. En conséquence, pour obtenir des assemblages qui vibrent à la fréquence cible, il faut respecter les effets inertiels. Pour cela, nous avons décidé de garder les dimensions de la section transversale d'un assemblage du réacteur Phénix : la longueur du côté de l'hexagone  $l$  est de 71.4 mm et l'épaisseur du jeu fluide entre deux faces des assemblages  $b$  est de 3 mm.

Pour estimer les effets inertiels, nous avons repris le travail de Chen [8] en considérant l'aire du cercle équivalent à celle de notre assemblage ; l'aire de l'espace fluide est aussi conservée. La masse linéaire du solide est calculée comme :

$$m_s = \rho_s A_s = \rho_s \frac{3l^2 \sqrt{3}}{2} \sim 15.8 \text{ kg/m}$$

où  $\rho_s$  est la masse volumique du PMMA, qui vaut 1190 kg/m. La valeur de la masse ajoutée linéique a été calculée par la solution analytique de Chen. Le coefficient de masse ajoutée  $C_M$  est 25.24 et il dépend de la viscosité cinématique du fluide et de la surface du solide. Pour forts confinements,  $C_M$  n'est pas sensible à la fréquence d'oscillation. En revanche, selon que nous considérons comme fluide l'eau ou la solution d'eau et de NaI, la valeur de la masse ajoutée ( $M_{add} = \rho_f A_s C_M$ ) change. Alors que la viscosité cinématique ne varie pas sensiblement entre eau et solution eau-NaI, la masse volumique de l'eau est 1000 kg/m<sup>3</sup> et celle de la solution eau-NaI est 1900 kg/m<sup>3</sup>. En conséquence, nous retenons les deux valeurs suivantes :

$$M_{add,H_2O} \sim 332 \text{ kg/m} \quad M_{add,NaI} \sim 631 \text{ kg/m}$$

Puisqu'elle donne une fréquence d'oscillation la plus basse, nous prenons  $M_{add,NaI}$  comme référence pour la suite.

Afin de trouver la valeur de la fréquence de vibration en eau-NaI, nous admettons que l'assemblage vibre comme une poutre encastree-libre. Dans ce cas, le rapport entre les fréquences en air et en eau-NaI est défini par l'équation suivante (Éq. 6.1) :

$$\frac{f_{air}}{f_{NaI}} = \sqrt{\frac{m_s}{M_{add,NaI}}} + 1 \quad (6.1)$$

où  $m_s$  représente la valeur de la masse linéique du solide. Par cette formule, nous supposons qu'une poutre à base hexagonale a le même comportement qu'une poutre à base cylindrique à parité de surface transversale. Alors, l'aire du cercle équivalent à celle d'un assemblage hexagonal est retenue. Finalement, la valeur du rapport des fréquences est de 6.4. Dans le Tab. 6.1.2, nous reportons un résumé des valeurs fondamentales pour le dimensionnement.

b [mm]	3	jeu ou espace inter-assemblage
l [mm]	71.4	Côté de l'hexagone
$\rho_s$ [ kg/m <sup>3</sup> ]	1190	Masse volumique PMMA
$A_s$ [mm <sup>2</sup> ]	13251.7	Surface de l'hexagone
$R_{int}$ [mm <sup>2</sup> ]	64.94	Rayon du cylindre interne équivalent
$R_{ext}$ [mm <sup>2</sup> ]	67.94	Rayon du cylindre externe équivalent
$m_s$ [kg/m]	15.76	Masse linéique de l'hexagone
$M_{add,NaI}$ [kg/m]	630.83	Masse ajoutée linéique en eau-NaI
$C_M$	25.24	Coefficient de masse ajoutée en eau-NaI
$f_{air}/f_{NaI}$	6.4	Rapport des fréquences

Ces valeurs étant déterminées, nous avons modélisé l'élément complet (assemblage hexagonal et support) avec le code Cast3M [7] et nous en avons réalisé l'analyse modale en air. Les dimensions du support bilame et la hauteur de l'assemblage ont été calculées afin d'obtenir la fréquence en air  $f_{air}$  telle que  $f_{NaI}$  soit compris entre 2 et 3 Hz.

Pour obtenir un mouvement bidimensionnel de l'assemblage, le déplacement entre la tête et la base de la partie hexagonale doit rester inférieure à 3% de sa hauteur. Pour ce faire, l'assemblage hexagonal a une hauteur réduite par rapport à un assemblage de Phénix. Ceci permet d'éliminer certaines incertitudes liées aux effets de flexion pour des poutres très élancées. Néanmoins, la

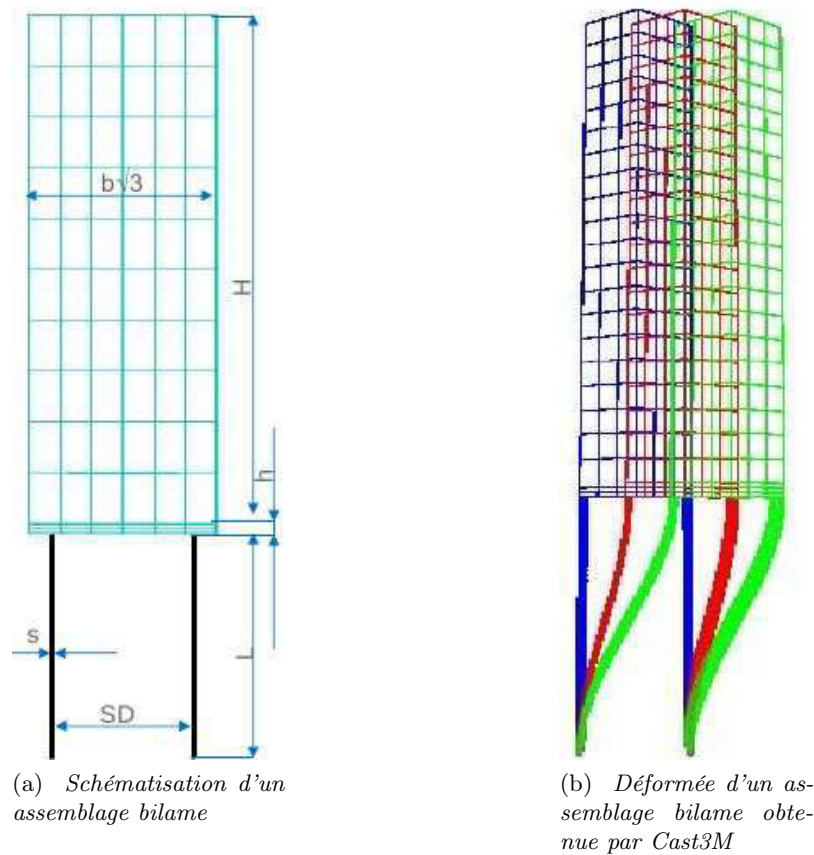


FIGURE 6.1 – Assemblage bilame : schématisation et déformée Cast3M

réduction de la hauteur est limitée par le fait que des effets des bords apparaissent en partie supérieure et inférieure des assemblages. Raisonnablement, une hauteur de 50 cm nous semble suffisante pour respecter ces contraintes dans la mesure où il subsiste un ordre de grandeur entre la hauteur de l'assemblage et son côté. Afin de préserver la stabilité de l'assemblage et pour faciliter le montage, une plaque en acier inoxydable a été rajoutée entre les lames et l'élément hexagonal. Puisque l'épaisseur de cette plaque conditionne la fréquence de vibration, elle a été utilisée comme un paramètre de calcul.

Enfin, les grandeurs géométriques qui peuvent varier sont : la hauteur des lames  $L$ , l'épaisseur des lames  $s$ , la distance des lames  $SD$ , l'épaisseur de la plaque  $h$  (Fig. 6.1a). Le calcul a été réalisé avec le code Cast3M. La Figure (Fig. 6.1b) montre la déformée et le maillage utilisés. Les calculs ont permis de mettre au point le jeu de paramètres suivant (Tab. 6.1.2) :

H [mm]	500
h [mm]	10
s [mm]	3
L [mm]	220
SD [mm]	84

Enfin, la fréquence de vibration calculée en air est de 14.18 Hz et donc en eau-NaI est 2.21 Hz. En utilisant de l'eau claire, la masse volumique diminue et la fréquence est de 3.02 Hz, qui reste dans la gamme des fréquences cibles. La plaque au-dessous de l'assemblage hexagonal est divisée en cales d'1 mm d'épaisseur, afin de permettre un ajustement de fréquence.

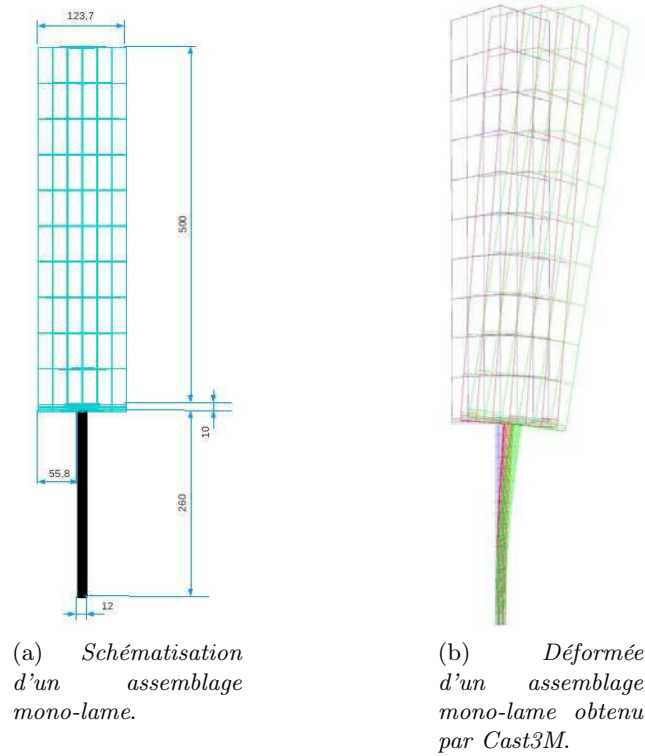


FIGURE 6.2 – Assemblage mono-lame : schématisation et déformée Cast3M

### 6.1.3 Dimensionnement de l'assemblage mono-lame

Afin de représenter les mouvements des assemblages lors des AURNs, nous avons dimensionné un assemblage mono-lame. Le support en acier inoxydable est composé par une seule lame positionnée au centre de la base de support.

Nous avons gardé les dimensions de l'assemblage hexagonal, de façon que seulement le support soit recalculé. Le même principe que pour l'assemblage bilame a été utilisé. Par l'analyse modale avec Cast3M [7], nous avons dimensionné la lame afin d'obtenir la même fréquence en air que celle de l'assemblage bilame. Avec les dimensions reportées dans la Figure 6.2a, l'assemblage a une fréquence en air de 14.80 Hz et une fréquence en eau-NaI de 2.47 Hz.

### 6.1.4 PISE-1a : maquette mono-assemblage

Afin de caractériser dynamiquement l'assemblage, l'installation expérimentale PISE-1a (Fig. 6.3) a été réalisée. La maquette est composée d'un seul assemblage entouré par une cuve hexagonale. L'épaisseur de fluide qui sépare les deux composants de la maquette est de 7 mm : cette valeur, bien qu'elle soit le double par rapport à celle envisagée, permet plus facilement de visualiser l'écoulement pendant les oscillations et aussi de mettre au point l'instrumentation. L'assemblage est équipé d'une jauge de contrainte positionnée à  $1/4$  de distance de la base du support. Afin de vérifier le parallélisme du déplacement, les mouvements de l'assemblage hexagonal sont mesurés avec un vibromètre laser le long de la hauteur.

La cuve présente une ouverture au milieu de la hauteur pour permettre la connexion au dispositif d'injection et 6 ouvertures dans la partie basse pour l'évacuation du fluide en limitant les perturbations de l'écoulement. Le diamètre d'entrée du fluide peut être ajusté au moyen de

bouchons de taille variable. Pendant les essais d'oscillations libres, toutes les ouvertures sont bouchées.

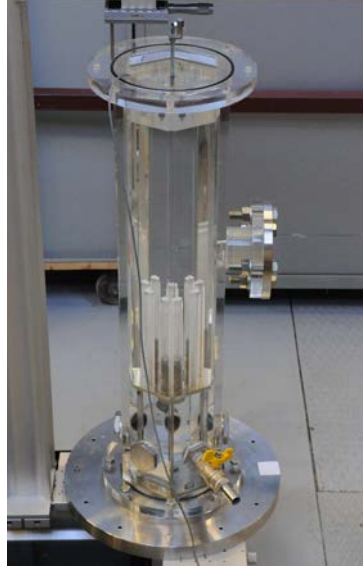


FIGURE 6.3 – PISE-1a : maquette mono-assemblage

Les poids de la maquette entière et des ses composantes sont résumées en Tab. 6.1.

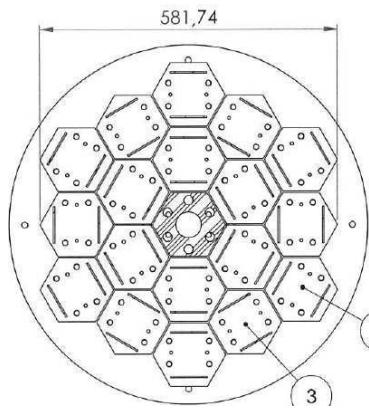
$m_{hex}$ [kg]	masse de l'hexagone	7.50
$m_{lam}$ [kg]	masse du support bilame	2.36
$m_{vis}$ [kg]	masse des vis	0.52
$m_{tot}$ [kg]	masse totale	10.38

TABLE 6.1 – Poids de l'assemblage de la maquette PISE-1a et des ses composantes

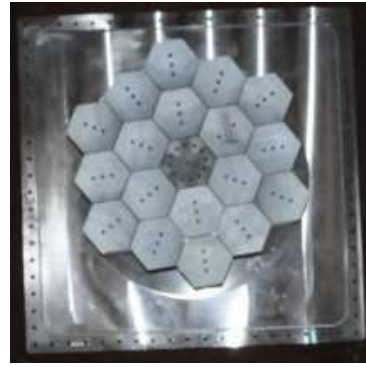
### 6.1.5 PISE-2c : maquette 19 assemblages

L'installation expérimentale PISE-2c (Fig. 6.5b) est composée de 19 assemblages disposés en deux couronnes. L'espace inter-assemblage est de 3 mm, valeur de référence de Phénix. Les supports bilame sont orientés de manière que les assemblages puissent se déplacer radialement (Fig. 6.4a). Une vue du dessus de la maquette est présentée sur la Figure 6.4b. À cause du faible inter-assemblage et pour garantir le respect des tolérances de construction, chaque assemblage est numéroté et il y a un seul positionnement possible.

L'élément central est fixe et il est composé par un cylindre en acier inoxydable creux sur lequel est vissé un assemblage hexagonal en PMMA (Fig. 6.5a). Cet assemblage a pour particularité d'avoir des ouvertures à la mi-hauteur de chaque face, qui sont utilisées dans les essais avec déplacement par injection liquide. Les ouvertures ont un diamètre réglable avec des bouchons, de 30 à 10 mm chacun. Tous les éléments sont vissés au sommier et insérés dans une cuve de section carrée en PMMA de dimensions 1000x1000x1160 mm (Fig. 6.6). L'enceinte est percée dans la partie basse pour permettre la sortie de l'eau lors des essais d'injection. Un couvercle en PMMA est prévu lors des essais de visualisation par caméra rapide et PIV afin d'éviter la formation des ondes à la surface libre.

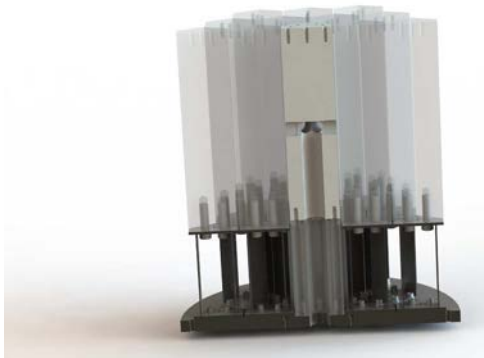


(a) Position des lames sur la section transversale

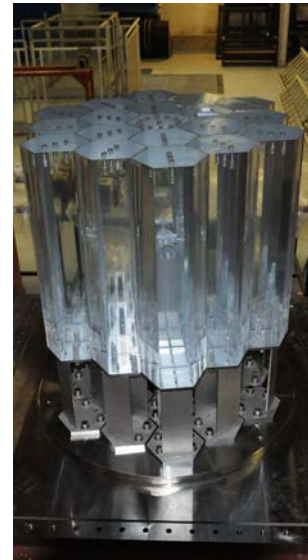


(b) Vue de dessus de la maquette

FIGURE 6.4 – PISE-2c : schématisation et vue de la section transversale



(a) Section longitudinale de la maquette : vue de l'assemblage central creux



(b) Vue de côté de la maquette

FIGURE 6.5 – PISE-2c : schématisation et vue de la section longitudinale

### 6.1.6 Plan d'essais

Différents types d'essais sont prévus :

- Vibrations libre en air et en eau et/ou eau-NaI : déplacement des assemblages d'une quantité connue et calcul de la fréquence et du coefficient d'amortissement. Cette expérience a été utilisée pour caractériser l'assemblage PISE-1a et tous les assemblages de PISE-2c ;
- Vibrations induites par une injection de fluide : tests en fonction du temps, de la vitesse d'injection et du volume de liquide injecté. Par une injection de durée suffisamment longue, il s'agit de déterminer la position d'équilibre des assemblages. Pour des temps courts, comme le temps des AURNs 200 ms, nous prévoyons de tester la réponse des assemblages ;
- Blocage des assemblages par un crabe et injection de fluide : nous souhaitons visualiser l'écoulement dans les jeux pour estimer les pertes de charge dans la maquette, sur une



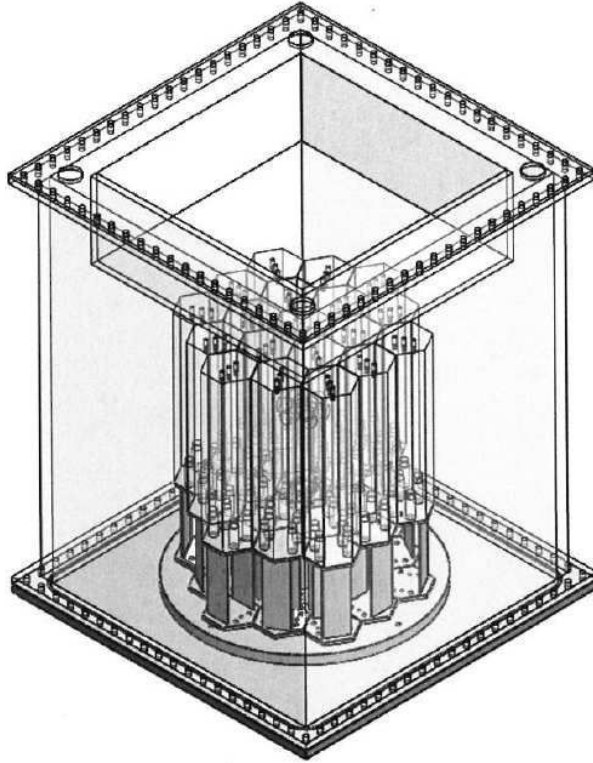


FIGURE 6.6 – PISE-2c : maquette complète

géométrie fixe.

## 6.2 Présentation et analyse des essais, simulations numériques sur PISE-1a

Nous présentons les essais effectués avec la maquette mono-assemblage PISE-1a.

Afin de caractériser dynamiquement l'assemblage, nous avons effectué des oscillations libres en air et en eau. Les fréquences et les taux d'amortissement sont fournis pour tous les essais.

Nous présentons des mesures effectuées par vélocimétrie d'images de particules (PIV) afin de comprendre le type d'écoulement fluide dans le gap. Ces essais sont modélisés avec le modèle « Cast3M Navier-Stokes » (équations de Navier-Stokes 2D) et le modèle « Cast3M  $up\phi$  » (équations d'Euler 2D et 3D), déjà présenté dans le Chapitre 4.

### 6.2.1 Essais en air sur la maquette PISE-1a

Nous avons réalisé des oscillations libres en air sans confinement de l'assemblage afin de le caractériser dynamiquement. La maquette a été équipée d'une jauge de déformation positionnée à  $1/4$  de la hauteur d'une lame. La carte d'acquisition, Nationale Instrument 9325, connectée à la jauge de déformation ne permettant pas des fréquences d'acquisition inférieure à 800 Hz, une fréquence de 1000 Hz a été retenue. Un vibromètre laser (KEYENCE LK-402 [27]) a été utilisé d'abord pour étalonner la jauge de déformation, puis comme un deuxième système de mesure de déplacement. Ce vibromètre enregistre la position de la base de l'hexagone pendant la plupart

des essais. La tolérance de mesure sur le déplacement de  $\pm 2 \times 10^{-3}$  mm.

Nous avons examiné la réponse dynamique de la maquette pour différents déplacements initiaux  $a_0$ , notamment 0.5, 1.0, 1.5, 2.0 et 2.5 mm. Des exemples de signaux fournissant l'évolution dans le temps du déplacement de la structure sont montrés en Fig. 6.7. Dans toutes les évolutions, le déplacement donné par la jauge de déformation est supérieur d'environ 20% à celui mesuré par le vibromètre laser. Chaque signal a été traité avec deux méthodes pour trouver la fréquence et l'amortissement de la structure. Pour la première, il s'agit d'appliquer la transformée de Fourier rapide (FFT) au signal du déplacement avec MATLAB. Cette méthode permet d'atteindre une résolution fréquentielle de 0.1 Hz. La deuxième méthode consiste en l'utilisation de l'identification modale [26]. Elle permet d'évaluer également le taux d'amortissement  $\xi$  par une estimation aux moindres carrés du déplacement. L'erreur sur la fréquence fournie par cette méthode est la même que pour la précédente. Concernant le taux d'amortissement, nous avons observé une précision croissante en fonction de la longueur du signal. Deux spectres fréquentiels obtenus par FFT sont reportés respectivement pour le signal obtenu par la jauge de déformation, Fig. 6.8a et le vibromètre, Fig. 6.8b. Les deux spectres sont en bon accord. Néanmoins, le signal de la jauge de déformation montre des fréquences parasites qui sont absentes dans le spectre laser. En conséquence, toutes les analyses suivantes, pour les oscillations libres en air, sont effectuées avec le signal laser. À titre d'exemple, nous reportons sur la Fig. 6.8c le résultat final issu de la méthode d'identification modale.

#### **6.2.1.1 Plage de variation de la fréquence et du taux d'amortissement pour les essais en air**

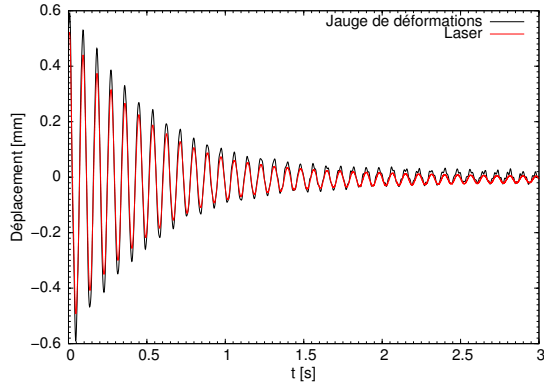
Les valeurs de la fréquence et du taux d'amortissement en fonction du déplacement initial  $a_0$  sont indiquées sur la Fig. 6.9 pour tous les essais effectués. La fréquence varie d'environ 10% pour chaque déplacement initial  $a_0$  et le taux d'amortissement d'environ 25%. Cette variation des fréquences trouvées est assez large. Il est possible que l'assemblage soit affecté par quelques erreurs de montage, bien que soigneusement préparé.

Nous observons une anomalie sur la variation des données pour le déplacement initial de 1.5 mm. La gamme de fréquence obtenue est plus élevée (environ 15%) et l'erreur sur  $\xi$  est de presque 50%. Ceci peut être expliqué par un temps d'acquisition du signal inférieur par rapport aux autres essais. En conséquence, un manque de précision sur les calculs de la fréquence est prévisible.

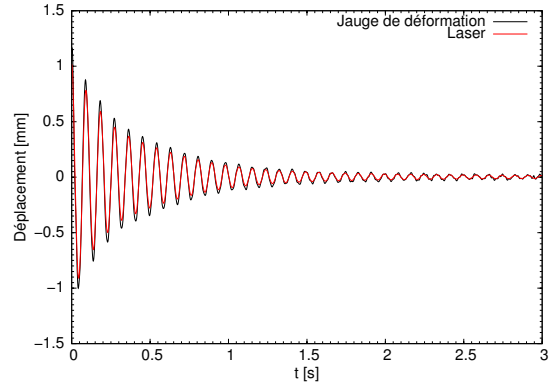
Nous pouvons noter (Fig. 6.9b) que le taux d'amortissement tend à augmenter et la fréquence tend à diminuer pour des  $a_0$  plus élevés. Ceci est dû à une augmentation d'énergie interne de déformation de la structure, qui implique une augmentation de l'énergie dissipée. Comme la fréquence d'oscillation pour une oscillation libre en air est directement proportionnelle à  $(1 - \xi^2)$ , si le taux d'amortissement augmente, la fréquence augmente.

#### **6.2.1.2 Tests sur le parallélisme de l'assemblage PISE-1a**

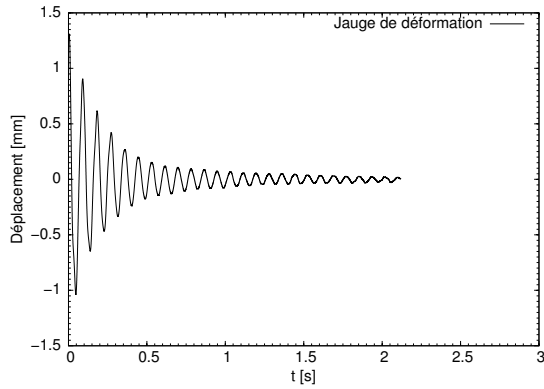
Nous avons vérifié que l'assemblage hexagonal de la maquette PISE-1a se déplace parallèlement à sa propre génératrice. Pour ce faire, nous avons effectué des essais où le vibromètre laser mesure



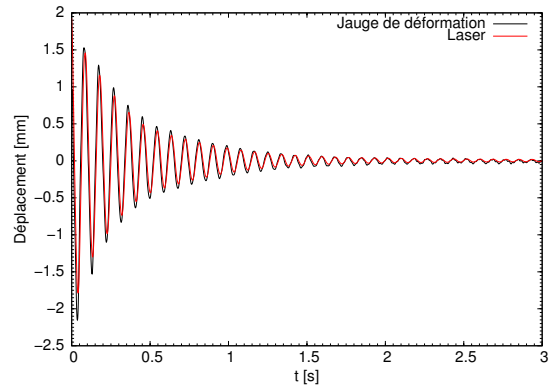
(a)  $a_0 = 0.5$  mm



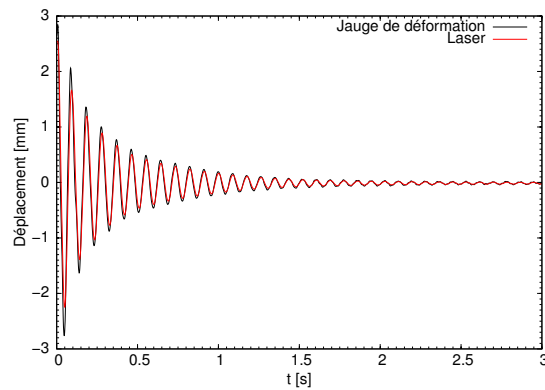
(b)  $a_0 = 1.0$  mm



(c)  $a_0 = 1.5$  mm

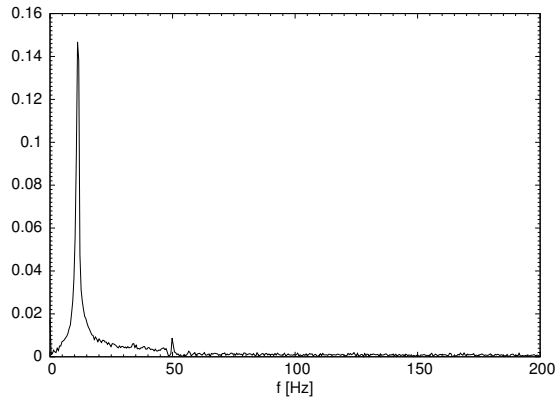


(d)  $a_0 = 2.0$  mm

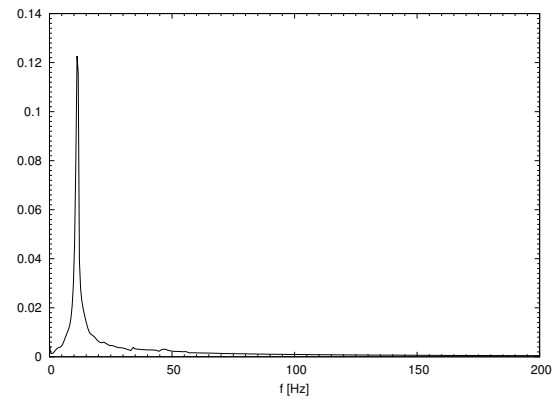


(e)  $a_0 = 2.5$  mm

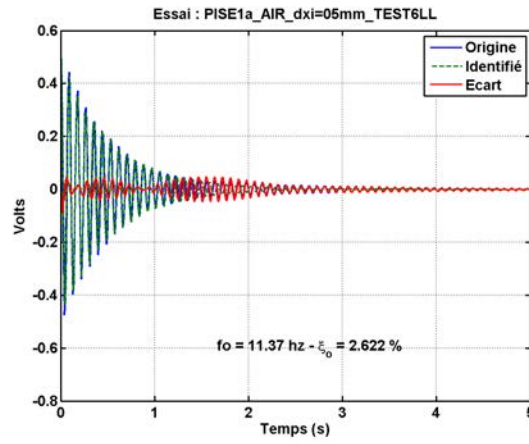
FIGURE 6.7 – Évolution dans le temps du déplacement de l'assemblage de PISE-1a lors des vibrations libres en air mesuré avec un jauge de déformations et un vibromètre laser pour différents déplacements initiaux  $a_0$



(a) *Signal jauge de déformation*

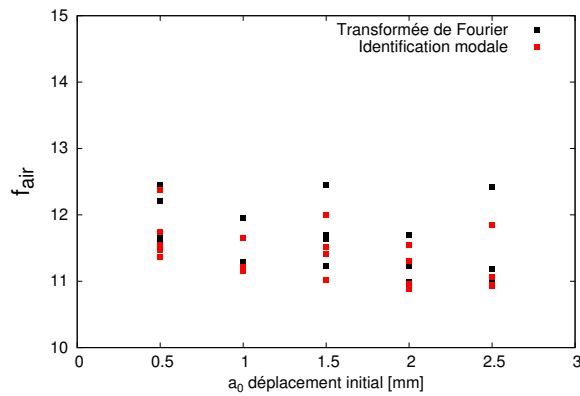


(b) *Signal laser*

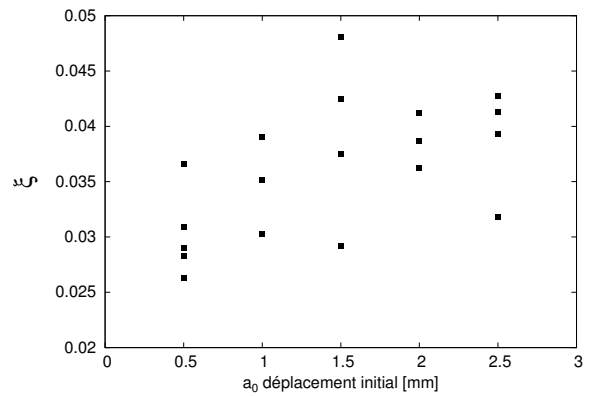


(c) *Identification modale*

FIGURE 6.8 – Spectre de la fréquence pour une oscillation libre en air avec déplacement initial  $a_0$  de 0.5 mm pour la maquette PISE-1a et résultat obtenu par l'identification modale



(a) *Fréquence en air*



(b) *Taux d'amortissement*

FIGURE 6.9 – Plage de variation de la fréquence et du taux d'amortissement pour des vibrations libres en air de la maquette PISE-1a

$a_0$ [mm]	Fréquence FFT [Hz]	Fréquence Id.Mod. [Hz]	Taux d'amortissement %
0.5	11.63	11.47	3.09
0.5	11.70	11.52	3.09
0.5	11.72	11.54	2.90
0.5	11.47	11.37	2.63
0.5	12.21	11.74	3.66
0.5	11.47	11.37	2.83
0.5	12.45	12.38	1.39
1.0	11.95	11.65	3.91
1.0	11.23	11.21	3.03
1.0	11.29	11.15	3.51
1.5	11.70	11.41	4.81
1.5	11.63	11.52	4.25
1.5	11.23	11.02	3.75
1.5	12.45	11.99	2.92
2.0	11.70	11.30	5.12
2.0	11.70	11.54	4.12
2.0	11.23	10.96	3.62
2.0	10.99	10.88	3.86
2.5	11.19	11.07	6.31
2.5	11.06	10.93	4.13
2.5	11.00	10.94	3.94
2.5	10.93	10.93	4.27
2.5	12.42	11.85	3.18

TABLE 6.2 – Résumé des fréquences et de taux d'amortissement trouvés lors des essais d'oscillation libre en air sur PISE-1a

le déplacement à la hauteur de 250 mm (mi-hauteur de l'hexagone) ou en tête de l'assemblage. Donc, nous avons comparé l'évolution dans le temps du signal laser et de la jauge de déformation.

Nous reportons sur la Fig. 6.10 les déplacements de l'assemblage en fonction du temps pour une amplitude initiale d'oscillation de 0.5 mm. Une petite différence sur l'amplitude est présente pour les toutes premières oscillations ; après, la deuxième oscillation, les deux signaux semblent en bon accord. En effet, une erreur d'environ 20% se produit sur l'amplitude des pics initiaux. Nous pouvons tirer les mêmes conclusions pour les essais avec une amplitude initiale de plus de 2.5 mm (Fig. 6.11). Sur la Fig. 6.12, les déplacements dérivés des mesures de la jauge de

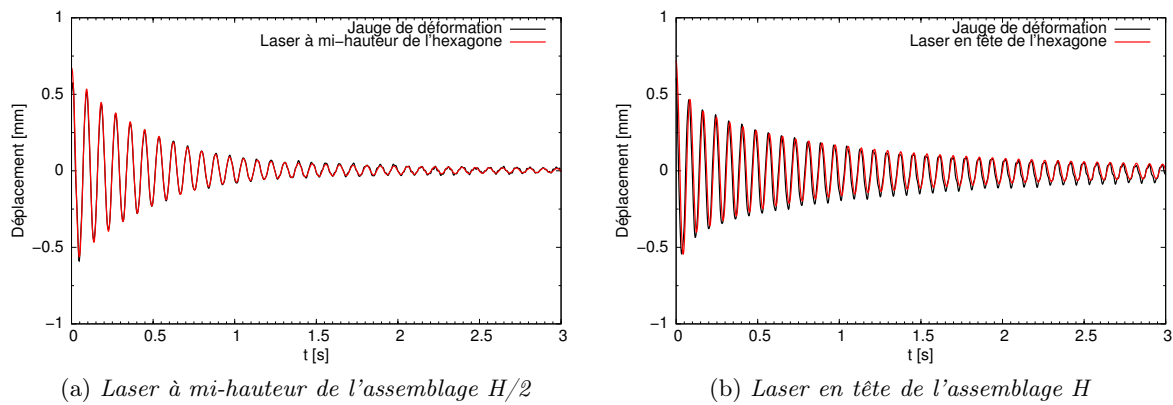


FIGURE 6.10 – Évolution de la position de l'assemblage dans la maquette PISE-1a pour des oscillations libres en air avec  $a_0 = 0.5$  mm pour différentes hauteurs

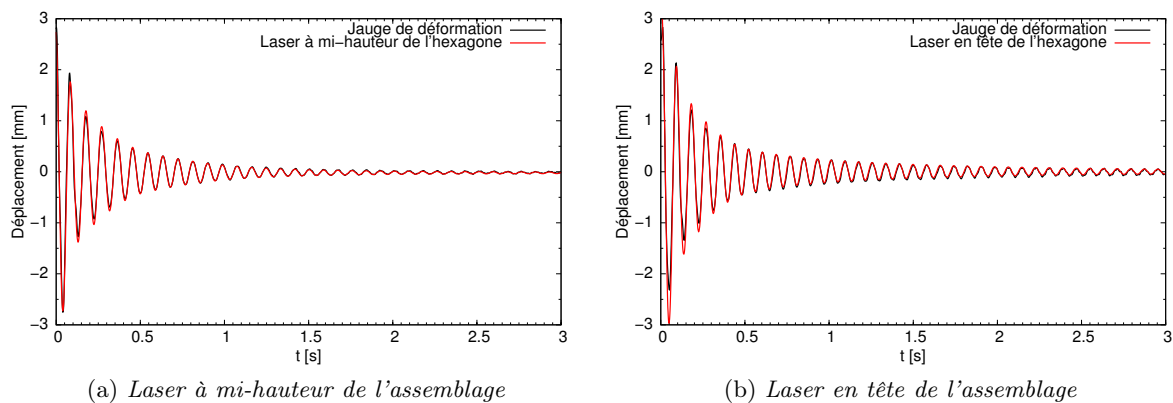


FIGURE 6.11 – Évolution de la position de l'assemblage dans la maquette PISE-1a pour des oscillations libres en air avec  $a_0 = 2.5$  mm pour différentes hauteurs

déformation et du vibromètre de la Figure 6.10a sont reportés l'un en fonction de l'autre. Ceci permet de mieux visualiser l'erreur entre les deux mesures. En effet, les deux signaux génèrent un nuage de points assez proche de la bissectrice, sauf aux premiers instants. Sur cette base, nous admettons que la structure se déplace parallèlement à sa propre génératrice et ne dispose que d'un seul degré de liberté.

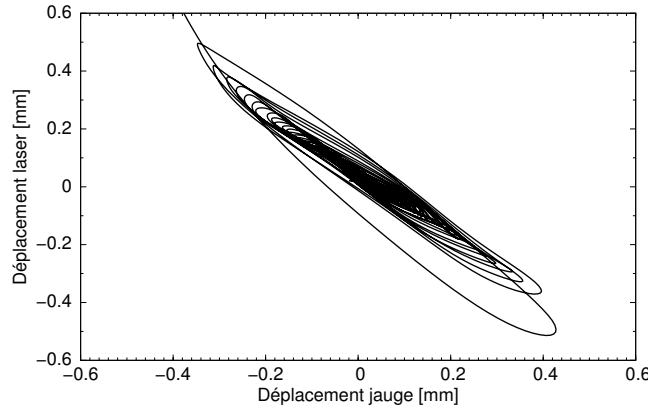


FIGURE 6.12 – Déplacement obtenu par le vibromètre laser vs déplacement obtenu par la jauge de déformation pour une oscillation libre en air avec  $a_0 = 0.5$  mm

## 6.2.2 Simulations numériques des essais en air sur la maquette PISE-1a

### 6.2.2.1 Détermination de la masse du solide associée au mouvement : contribution des lames

Nous avons simulé, avec le modèle numérique 2D « Cast3M Navier-Stokes », les oscillations en air de l'assemblage de la maquette PISE-1a. Dans ce modèle la maquette est modélisée comme un système masse-ressort amorti. Dans notre esprit, le support bilame est censé représenter le ressort et le corps hexagonal la masse du système. Néanmoins, une partie de l'inertie du support participe au mouvement (Tab. 6.1). Notamment, les lames sont doublement encastrées entre deux plateaux, dont celui du bas qui ne prend pas part au déplacement, alors que le plateau du haut participe.

Le mouvement de chaque lame (Fig. 6.13) est anti-symétrique par rapport à l'axe vertical passant par le point d'inflexion. Nous divisons la hauteur des lames en 8 parties égales, numérotées de 1 à 8, de bas en haut. En moyenne, la lame se déplace de la valeur  $l_m$ , c'est-à-dire la valeur de son point d'inflexion. Néanmoins, la tranche 1 peut être considérée immobile par rapport à la position statique de la lame (ligne rouge) ; les tranches 3-6 et 4-5 se déplacent par rapport au nœud de la même quantité mais de signe opposé. Donc, pour ce qui les concerne, les effets d'inertie s'annulent. Les tranches qui restent sont, finalement, les numéros 2, 7 et 8, c'est-à-dire les 3/8 de la masse totale. Cette masse est ajoutée à la masse de l'hexagone en PMMA, ce qui donne une valeur totale de 8.84 kg. Le modèle numérique requiert une masse linéique ; il faut, donc, diviser la masse trouvée par une hauteur. Comme l'inertie de l'hexagone est plus importante que celle des lames, nous négligeons la hauteur de lames en ne considérant que la hauteur de l'hexagone.

### 6.2.2.2 Résultats des simulations avec le modèle « Cast3M Navier-Stokes » en air

Avec ces données, nous avons effectué une simulation numérique bidimensionnelle « Cast3M Navier-Stokes » 2D. Nous imposons la raideur du système et le coefficient d'amortissement de la structure telle que la fréquence en air soit celle relative à l'expérience choisie pour la comparaison. La Fig. 6.14 montre la comparaison entre les déplacements expérimentaux

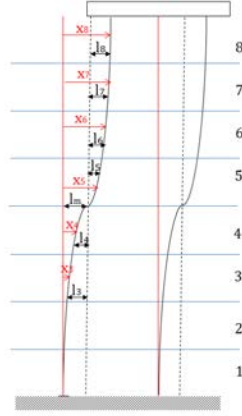


FIGURE 6.13 – Schéma du support bilame pour l'estimation de la masse qui participe au mouvement lors de l'oscillation

et la solution numérique. Un parfait accord est visible : le code de calcul restitue la fréquence expérimentale et l'amortissement de la structure.

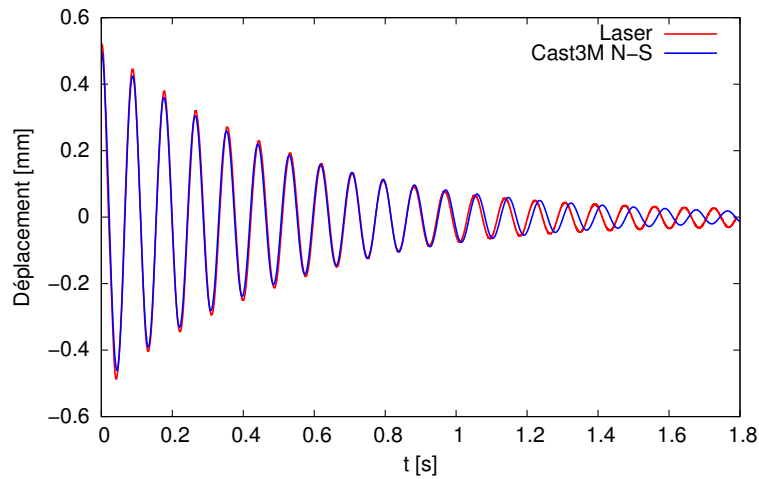


FIGURE 6.14 – Comparaison entre déplacement expérimental et solution numérique 2D « Cast3M Navier-Stokes » 2D

### 6.2.3 Essais en eau sur la maquette PISE-1a

Des essais en eau sur la maquette PISE-1a ont été effectués.

Nous rappelons que l'assemblage est monté sur un support bilame et entouré par une cuve à base hexagonale. Le jeu entre l'assemblage et cette cuve est de  $7 \pm 0.05$  mm. Dans ces essais, le vibromètre laser n'a pas été utilisé à cause de la présence de la cuve. En effet, la lumière du laser se réfracte tellement qu'elle n'arrive pas à dépasser l'épaisseur de la cuve. Donc, seul le signal de la jauge de déformation était disponible. Nous avons effectué la même campagne d'essais déjà faite en air : oscillations libres avec différents déplacements initiaux  $a_0$  (0.5, 1, 1.5, 2 et 2.5 mm). Nous reportons sur la Fig. 6.15 les évolutions dans le temps du déplacement de l'assemblage pour chaque  $a_0$ . De la même façon que pour les signaux du déplacement en air, nous avons utilisé la transformée de Fourier rapide (FFT) et l'identification modale pour trouver



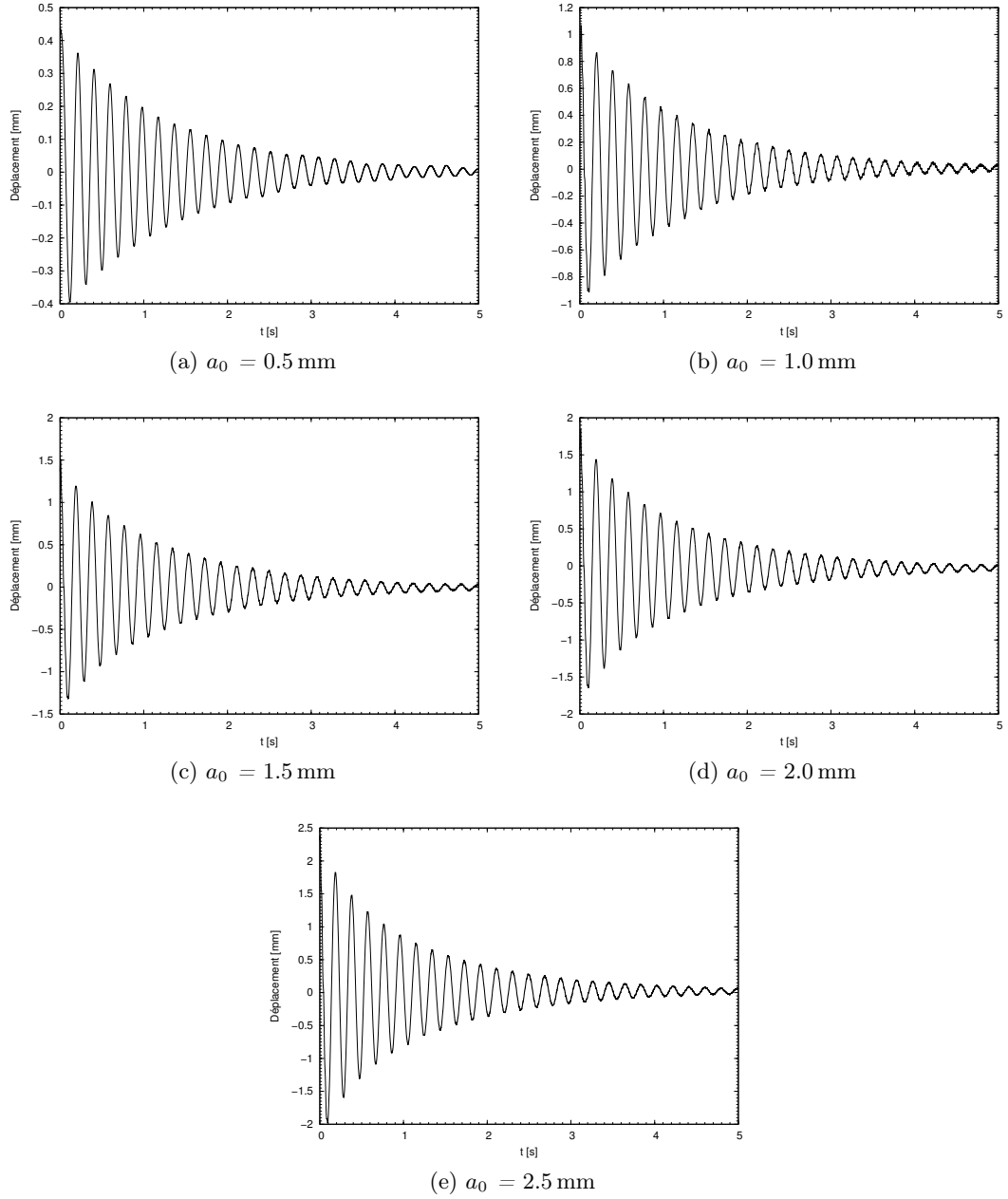
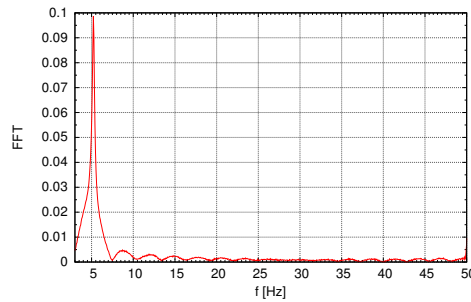
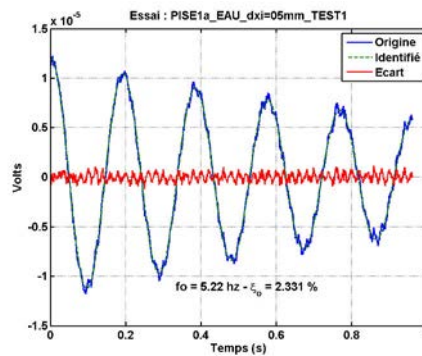


FIGURE 6.15 – Évolution dans le temps du déplacement de l'assemblage de PISE-1a lors des vibrations libres en eau mesuré avec un jauge de déformations pour différents déplacements initiaux  $a_0$

la fréquence et l'amortissement de tous les signaux. Le spectre de fréquence obtenu par la FFT et le résultat de l'identification modale sont donnés sur la Fig. 6.16 pour un déplacement de 0.5 mm. Nous pouvons noter que, par rapport aux signaux de déplacement en air, les signaux en



(a) *FFT*



(b) *Identification modale*

FIGURE 6.16 – Spectre de fréquence pour une oscillation libre en eau avec déplacement initial  $a_0$  de 0.5 mm pour la maquette PISE-1a et identification modale

eau sont plus réguliers. Ceci est visible aussi sur le spectre de fréquence, où les hautes fréquences n'apparaissent pas.

### 6.2.3.1 Plage de variation de la fréquence et du taux d'amortissement pour les essais en eau

Comme pour les essais en air, nous indiquons la plage de variation de la fréquence et du taux d'amortissement en eau (Fig. 6.17). La fréquence, pour un déplacement initial fixé, varie au maximum de 0.01 Hz et le taux d'amortissement de 10%. Par rapport aux essais en air, les données ont donc une variation inférieure. Ceci dépend évidemment de la présence de l'eau. Pour une configuration assez confinée comme celle de la maquette PISE-1a, le fluide exerce sur la structure une force importante qui tend à s'imposer sur les autres. En conséquence, la force fluide réduit les possibilités de la structure de se déplacer et l'oblige à suivre son propre mouvement. Le taux d'amortissement en eau est inférieur par rapport à celui en air. Cela est dû à l'augmentation de l'inertie du fluide. Cet effet est visible par la formulation du taux d'amortissement suggéré par Daogang [11] :

$$\xi = \frac{c_s + C_D}{2\sqrt{k_s(m_s + M_{add})}}$$

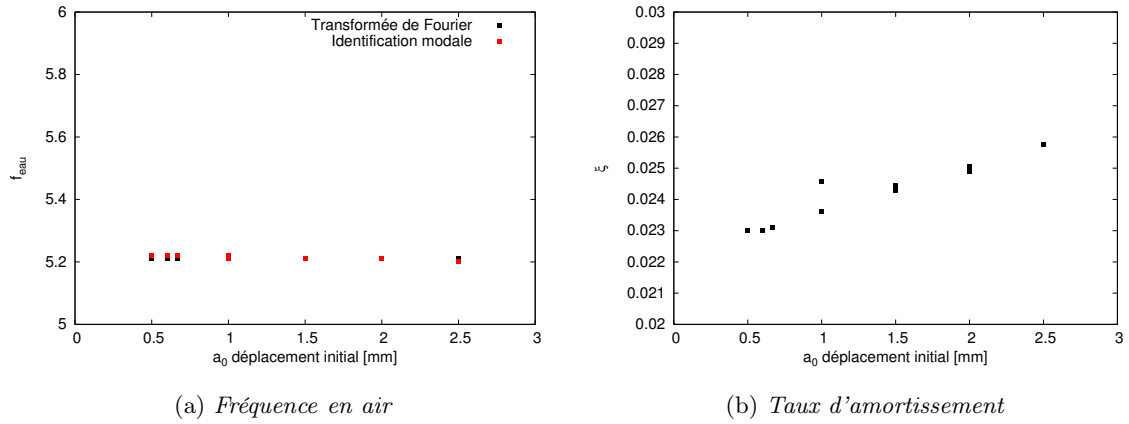


FIGURE 6.17 – Plage de variation de la fréquence et du taux d’amortissement pour des vibrations libres en eau de la maquette PISE-1a

Même si en eau le coefficient d’amortissement total ( $c_s + C_D$ ) est supérieur au seul coefficient d’amortissement en air  $c_s$ , la valeur de la masse ajoutée est encore plus importante et a pour effet de réduire le taux d’amortissement  $\xi$ .

Nous résumons tous les valeurs de la fréquence et du taux d’amortissement pour les essais en eau dans le Tableau 6.3.

$a_0$ [mm]	Fréquence FFT [Hz]	Fréquence Id.Mod. [Hz]	Taux d’amortissement %
0.5	5.21	5.22	2.30
0.6	5.21	5.22	2.30
0.6	5.21	5.22	2.30
0.67	5.21	5.22	2.31
1.0	5.21	5.22	2.46
1.0	5.21	5.21	2.36
1.5	5.21	5.21	2.44
1.5	5.21	5.21	2.43
2.0	5.21	5.21	2.51
2.0	5.21	5.21	2.49
2.5	5.21	5.20	2.58

TABLE 6.3 – Résumé des fréquences et des taux d’amortissement trouvés lors des essais d’oscillation libre en eau sur PISE-1a

Nous cherchons maintenant à définir la valeur du rapport entre la masse ajoutée et la masse linéique de la structure. Nous nous appuyons sur la formulation de Chen [8] valable pour un cas parfaitement bidimensionnel. Nous prenons une valeur moyenne pour la fréquence en air de l’assemblage égale à  $f_{air} = 11.73$  Hz et la valeur de la fréquence en eau trouvée pour les essais,  $f_{eau} = 5.21$  Hz. Donc, la valeur du rapport est :

$$\frac{M_{add}}{m_s} = \left( \frac{f_{air}}{f_{eau}} \right)^2 - 1 = 4.07$$

Considérons maintenant que la masse linéique de la structure soit la masse qui est censée se déplacer sur la hauteur de la partie hexagonale, c’est-à-dire 17.68 kg/m. Le coefficient de masse

ajoutée  $C_M$  est donc 5.53. Par rapport à la valeur prédite de Chung et Chen [9], le  $C_M$  expérimental est presque la moitié. Il faudrait une fréquence en air d'environ 16 Hz pour obtenir une valeur cohérente avec la théorie bidimensionnelle. Cet écart peut être dû à des effets de l'écoulement vertical. En effet, comment nous l'avons expliqué pour une géométrie cylindrique [40], l'écoulement du fluide est censé être bidimensionnel seulement dans la partie centrale de l'hexagone. En tête et en bas de l'hexagone, un écoulement nommé « jambage » se produit dans la direction verticale, parallèlement à la génératrice du cylindre. Ceci est dû à la condition de pression uniforme aux deux extrémités. Le fluide pénètre dans l'inter-assemblage en provenant de la surface libre et ressort en passant d'un côté à l'autre (Fig. 6.18). Comme l'écoulement 3D diminue l'effet de confinement du fluide et son inertie, la masse ajoutée est inférieure à la valeur théorique.

La hauteur sur laquelle l'écoulement se produit est de l'ordre du diamètre du cylindre externe à surface équivalente, environ 140 mm [40]. En conséquence, la hauteur où l'écoulement est bidimensionnel est environ 220 mm. Si nous divisons la masse de la structure par cette hauteur, la valeur du  $C_M$  est de 12.36, cohérent avec les solutions analytiques présentées dans la littérature.

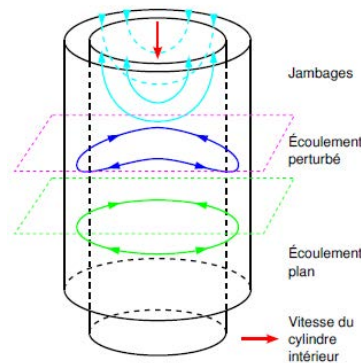


FIGURE 6.18 – Schéma théorique du développement d'un écoulement vertical lors d'une oscillation bidimensionnelle dans le plan transversal

#### 6.2.4 Visualisation de l'écoulement vertical : essais en eau avec PIV

Afin de confirmer expérimentalement nos hypothèses sur la structure 3D de l'écoulement, nous avons effectué des tests ultérieurs en eau. Pour visualiser l'écoulement du fluide autour de l'assemblage dans la direction verticale et dans le plan transversal, la technique PIV a été utilisée. À travers la comparaison de deux images, prises par une caméra à fréquence constante de 500 Hz, la technique PIV permet de reconstruire le déplacement moyen des particules mélangées avec le fluide. Nous supposons que ces particules suivent l'écoulement sans l'influencer et qu'elles sont uniformément distribuées dans les plans laser.

Chaque image est divisée en fenêtres de corrélation de taille  $[m; n] \rightarrow [32; 32]$  pixel. La mesure du déplacement est obtenue en corrélant deux fenêtres. L'algorithme PIV utilisé [30] permet de définir une fonction de corrélation symétrique entre deux fenêtres, en réduisant l'erreur sur la vitesse et le déplacement des particules. Dans notre travail, des visualisations de l'écoulement ont été effectuées dans l'inter-assemblage, le long de sa hauteur, au dessus de la tête de l'hexagone et le long de la face perpendiculaire au déplacement. Le pas d'espace entre un vecteur et son

successeur se situe entre 0.35 et 0.5 mm, en fonction de la largeur du champ de visualisation.

#### 6.2.4.1 Visualisation du plan parallèle à la face de l'hexagone et perpendiculaire au déplacement

Nous avons visualisé un plan parallèle à la face de l'hexagone et perpendiculaire au déplacement (Fig. 6.19). L'évolution du déplacement de l'hexagone mesuré avec la jauge de déformation est

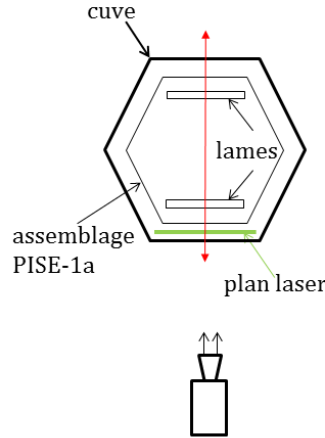


FIGURE 6.19 – Schéma du plan laser visualisé : plan parallèle à la face de l'hexagone et perpendiculaire au mouvement

montré sur la Fig. 6.20 pour une amplitude d'oscillation initiale  $a_0 = 1$  mm. Le champ de vitesse

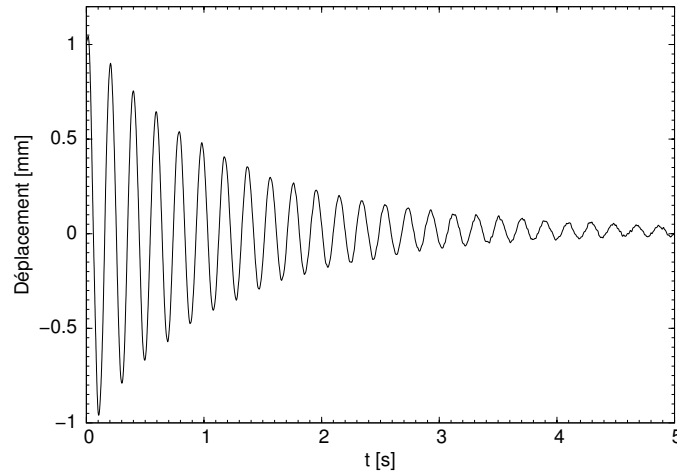
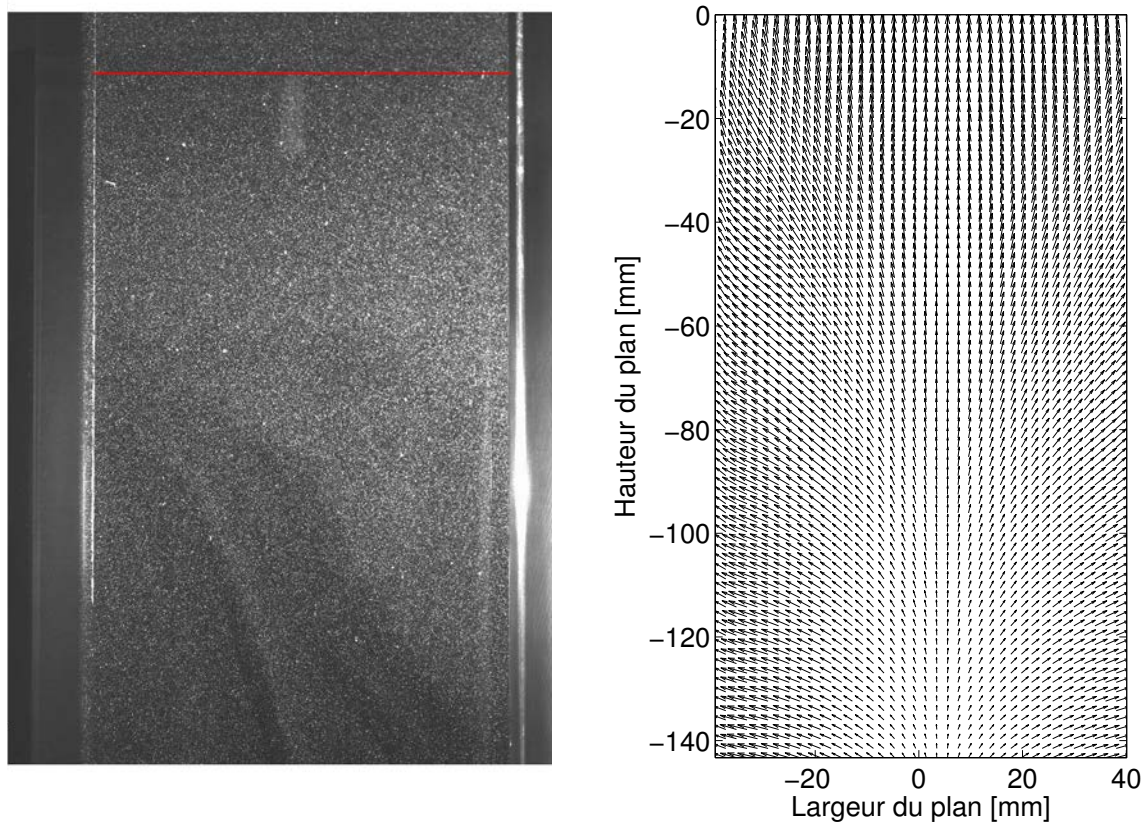


FIGURE 6.20 – Évolution du déplacement de l'assemblage PISE-1a mesuré lors des essais PIV

généré par les composantes horizontale et verticale de la vitesse, respectivement  $u$  et  $w$ , est donné en Fig. 6.21 à l'instant  $t = 0.1$  s. Au même instant  $t = 0.1$  s, nous traçons les profils de vitesse  $u$  et  $w$  sur les Fig. 6.22a et Fig. 6.22b, respectivement près de la tête de l'hexagone et en bas, vers la partie centrale. Les figures montrent que le fluide monte vers la surface libre avec une vitesse verticale plus élevée au centre du plan, exactement comme décrit par le schéma de la Fig. 6.18. Près de la tête de l'hexagone, la vitesse verticale est du même ordre que la vitesse horizontale. Comme prédite dans la théorie (voir [40]), l'échelle de vitesse est de l'ordre de 100 mm/s. En

revanche, au même instant mais à une distance plus élevée du bord de l'hexagone, la vitesse verticale est faible. Ceci confirme que l'écoulement autour de la maquette est essentiellement 2D dans la partie centrale. En effet, la théorie nous suggère que la distance à laquelle les effets 3D sur l'écoulement du fluide s'éteignent, est de l'ordre du rayon du cylindre externe équivalent. En conséquence, la vitesse verticale  $w$  devient négligeable à partir d'environ 140 mm de distance de la tête de l'hexagone.

Le profil de vitesse horizontale  $u$  est en bon accord avec la théorie présentée dans la Section 5.2 : la couche limite dans le plan transversal est assez proche des parois. Donc, en première approximation, l'écoulement du fluide peut être décrit par les équations d'Euler.



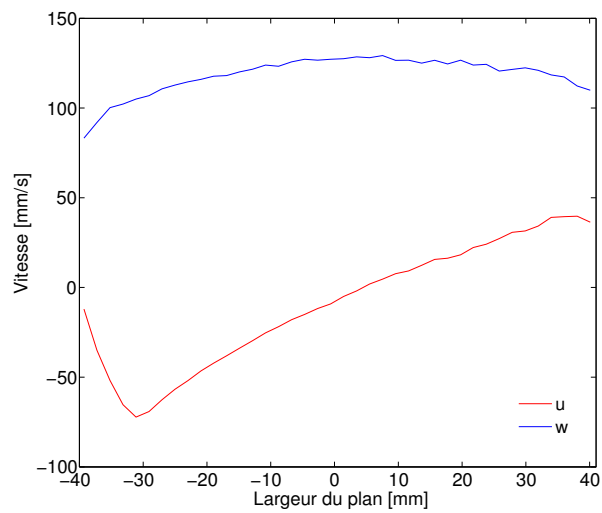
(a) Photo instantanée du champ de vitesse. La ligne rouge indique la tête de l'hexagone

(b) Champ de vitesse  $(u, w)$  à  $t = 0.1$  s

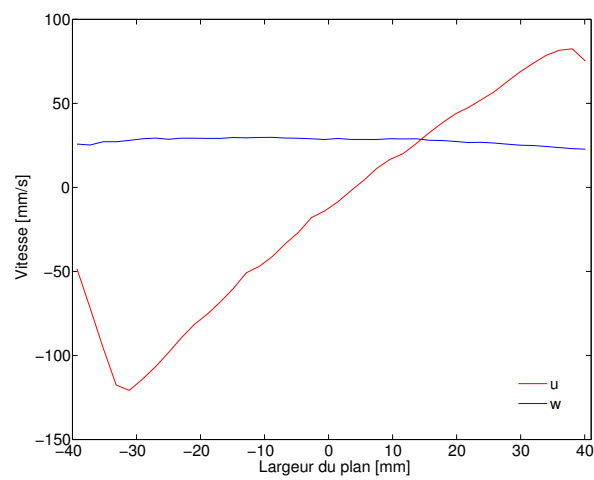
FIGURE 6.21 – Champ de vitesse  $(u, w)$  sur le plan parallèle à la face de l'hexagone et perpendiculaire au mouvement à  $t = 0.1$  s

#### 6.2.4.2 Visualisation du plan perpendiculaire à l'inter-assemblage et parallèle au déplacement

Nous avons choisi de visualiser le plan perpendiculaire à l'inter-assemblage dans la partie haute de l'hexagone et la partie basse, proche du support bilame (Fig. 6.23). Cette visualisation nous permet de vérifier si l'écoulement vertical est symétrique. Pour cela, une simple analyse qualitative a été effectuée. Le champ de vitesse visualisé  $(v, w)$  est reporté pour la partie haute sur la Fig. 6.24. En tête de l'hexagone, la formation de vortex est visible aux arêtes. Le vortex reste collé au coin et il suit le mouvement du solide. Pendant l'oscillation, il rentre dans l'inter-assemblage et il se



(a) *Profils de vitesse  $u$  et  $w$  à  $t = 0.1$  s à  $z = -29$  mm*



(b) *Profils de vitesse  $u$  et  $w$  à  $t = 0.1$  s à  $z = -134$  mm*

FIGURE 6.22 – Profils de vitesse à deux hauteurs différentes de l'hexagone dans le plan parallèle à la face de l'hexagone et perpendiculaire au mouvement

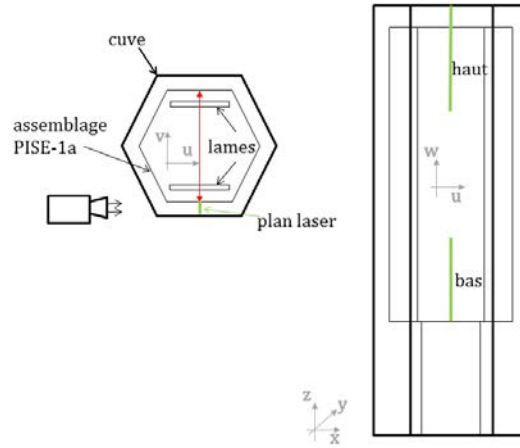


FIGURE 6.23 – Schéma du plan laser visualisé : plan perpendiculaire à l'inter-assemblage

développe sur toute son épaisseur pour une hauteur d'environ le côté de l'hexagone. Ensuite, l'écoulement du fluide tend à être quasiment bidimensionnel, comme montré sur la Fig. 6.24b. Dans la zone basse de l'hexagone, le comportement du fluide n'est pas le même (Fig. 6.25). En effet, la présence du support bilame empêche la formation de vortex. Néanmoins, l'écoulement reste principalement vertical, comme les profils de vitesse  $(v, w)$  le montrent sur la Fig. 6.26. Les profils des vitesses au voisinage de la partie centrale de l'hexagone se caractérisent par une vitesse verticale assez faible par rapport à la vitesse dans le plan transversal. Ceci confirme, encore une fois, la tendance de l'écoulement à être bidimensionnel dans la zone centrale.

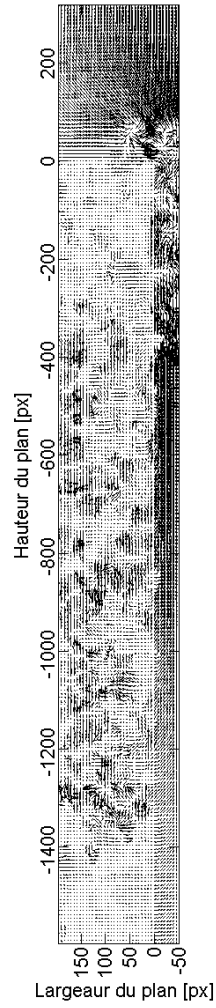
#### 6.2.4.3 Visualisation du plan transversal au-dessus de la tête de l'hexagone

Afin de comprendre le passage du fluide d'un inter-assemblage à l'autre, nous avons visualisé le plan transversal au-dessus de la tête de l'hexagone (Fig. 6.27a). Le champ de vitesse  $(u, v)$  à  $t = 0.1$  s pour un déplacement d'environ 1 mm est montré sur la Fig. 6.27b. Le fluide sort de l'inter-assemblage horizontal au nord de la figure pour rentrer dans l'inter-assemblage horizontal au sud. Le mouvement est donc symétrique par rapport au plan perpendiculaire au déplacement. Près des arêtes, l'intensification du champ de vitesse nous confirme la présence de vortex, comme déjà vu sur la Fig. 6.24.

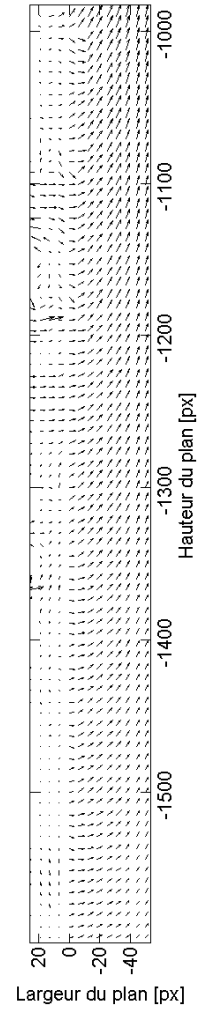
#### 6.2.5 Essais à différentes hauteurs d'eau sur la maquette PISE-1a

Nous avons effectués des essais avec différentes hauteurs d'eau dans l'inter-assemblage pour mieux comprendre comment l'inertie du fluide agit sur la structure. Nous avons considéré le niveau d'eau au ras de la tête, à la moitié et à  $1/4$  de la hauteur de l'hexagone. L'évolution du déplacement de l'hexagone mesuré par la jauge de déformation, pour tous les cas, est représentée sur la Fig. 6.28. La fréquence d'oscillation sur la Fig. 6.28a est de 5.33 Hz : elle varie de 0.1 Hz par rapport à celle des essais en eau avec 70 mm d'eau au-dessus de l'hexagone. Elle tend à augmenter lors d'une diminution du niveau d'eau et à se rapprocher de la fréquence en air de la maquette. En effet,





(a) *Champ de vitesse  $(v,w)$*



(b) *Zoom du champ de vitesse  $(v,w)$*

FIGURE 6.24 – Champ de vitesse  $(v,w)$  dans le plan parallèle au déplacement et perpendiculaire à l'inter-assemblage à  $t = 0.1$  s

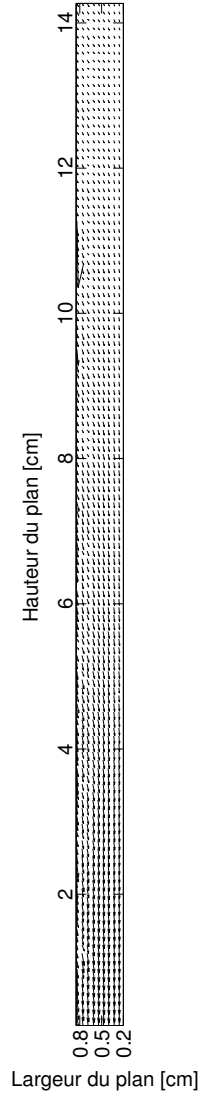


FIGURE 6.25 – Champ de vitesse  $(v,w)$  sur le plan parallèle au déplacement et perpendiculaire à l'inter-assemblage dans la partie basse de l'hexagone à  $t = 0.1$  s

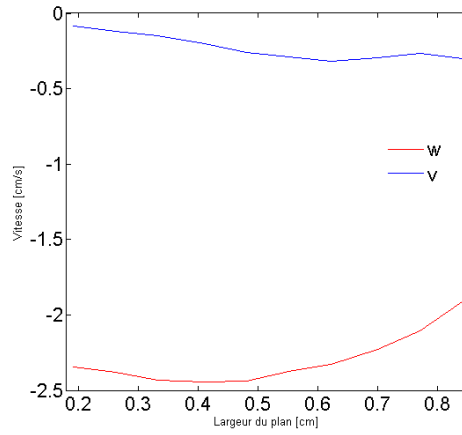
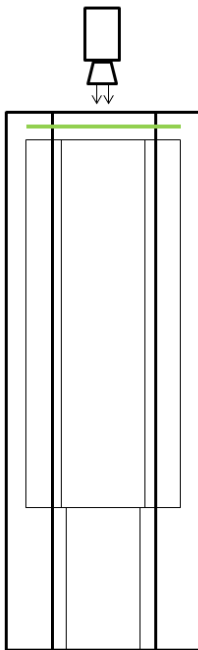
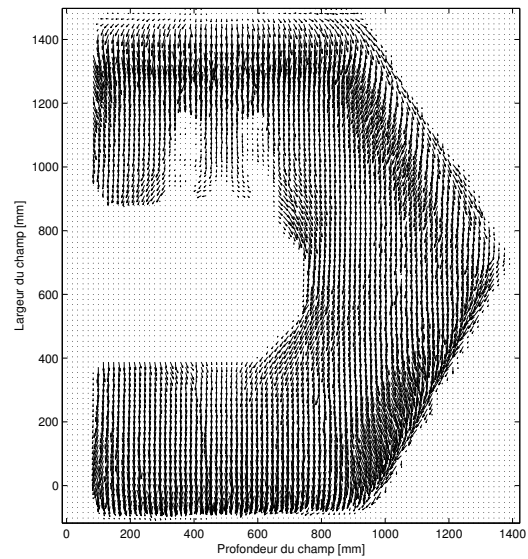


FIGURE 6.26 – Profils de vitesse ( $v, w$ ) à  $z = -2\text{cm}$  sur le plan parallèle au déplacement et perpendiculaire à l'inter-assemblage dans la partie basse de l'hexagone à  $t = 0.1\text{ s}$

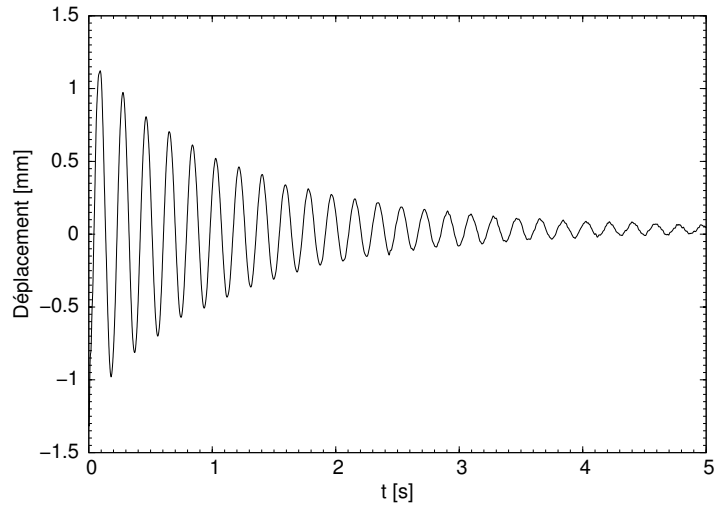


(a) Schéma du plan laser visualisé : dessus de la tête de l'hexagone

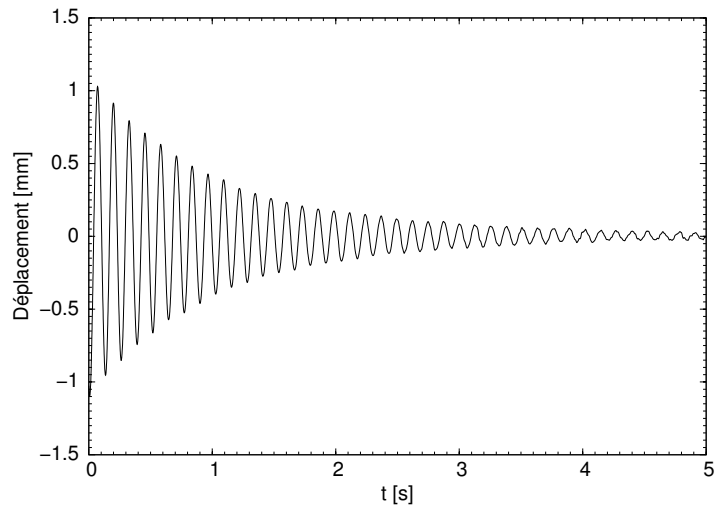


(b) Champ de vitesse  $u$  et  $v$  à  $t = 0.1\text{ s}$

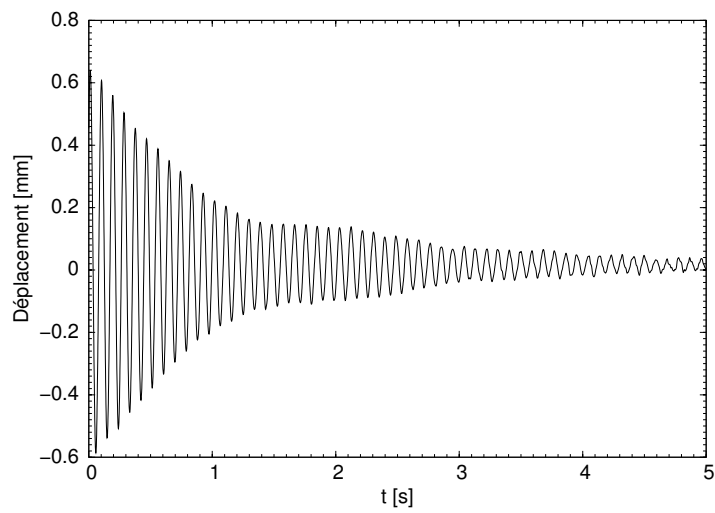
FIGURE 6.27 – Schéma du plan laser et champ de vitesse ( $u, v$ ) sur le plan transversal dessus de la tête de l'hexagone à  $t = 0.1\text{ s}$



(a) Niveau d'eau à ras de la tête de l'hexagone



(b) Niveau d'eau à la moitié de la hauteur de l'hexagone



(c) Niveau d'eau à  $1/4$  de la hauteur de l'hexagone

FIGURE 6.28 – Évolution du déplacement de l'assemblage de la maquette PISE-1a pour différents niveaux d'eau

pour l'essai où la cuve est remplie au quart, la fréquence de vibration est de 10.69 Hz par rapport à 11.73 Hz en air. Cela montre que la force fluide agissant sur le support bilame est négligeable par rapport à celle agissant sur la hauteur de l'hexagone.

En outre, l'évolution du déplacement indiqué sur la Fig. 6.28c montre un signal avec deux fréquences. La fréquence la plus élevée est celle d'oscillation du solide ; la deuxième est la fréquence d'oscillation de l'eau autour de l'hexagone. Pendant l'expérience, nous avons observés la formation d'ondes sur la surface libre et le déclenchement d'une instabilité. Cette instabilité peut être générées par la vibration verticale de la colonne d'eau (instabilité de Faraday), par l'accélération due à l'aspiration de l'air lors que l'assemblage s'écarte de la cuve (instabilité de Rayleigh-Taylor) ou simplement par le rencontre des ondes. Des essais ultérieurs sont nécessaires pour approfondir ce comportement.

L'essai avec la hauteur d'eau au ras de la tête de l'hexagone a également été effectué avec la technique PIV. Nous montrons sur la Fig.6.29 le champ de vitesse  $(u,w)$ . Aucune instabilité ne se produit à l'interface air-eau : la surface libre se déplace verticalement en conservant un profil plat.

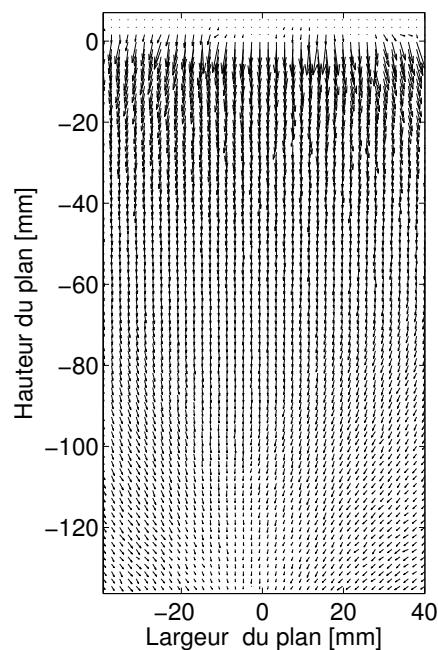


FIGURE 6.29 – Champ de vitesse  $(u,w)$  sur le plan parallèle à la face de l'hexagone à  $t = 0.2$  s

### 6.2.6 Simulations numériques des essais en eau sur la maquette PISE-1a

Dans cette section, nous présentons les résultats des simulations numériques effectuées avec le modèle « Cast3M Navier-Stokes » 2D. Ensuite, nous avons utilisé le modèle « Cast3M  $up\phi$  » 3D pour reproduire les expériences. Pour les simulations effectuées avec le modèle « Cast3M  $up\phi$  », nous ne reportons que la valeur de la fréquence en eau. La discussion sur le coefficient d'amortissement, et donc la reproduction du déplacement, est présente dans la Section 5.2.

### 6.2.6.1 Comparaison entre essai - « Cast3M Navier-Stokes » 2D - « Cast3M $up\phi$ » 2D

Nous avons réalisé une simulation d'un essai de vibration libre avec un  $a_0$  de 0.5 mm. Nous avons pris la même masse que celle utilisée pour la simulation en air (masse de la structure  $m_s = 17.68$  kg/m). Le taux d'amortissement de la structure est 2.65%, étant entendu que l'amortissement induit par le fluide est suffisamment important pour que celui de la structure puisse être négligé.

La comparaison est présentée sur Fig. 6.30. Le déplacement trouvé par le modèle « Cast3M Navier-Stokes » 2D - nommé « Calcul 1 » - a une fréquence inférieure à la valeur expérimentale. Le même résultat a été obtenu par les simulations avec le modèle « Cast3M  $up\phi$  » purement 2D (voir Tab. 6.4). Ceci veut dire que la force fluide calculée par les modèles est surestimée. En effet, la masse ajoutée expérimentale est la moitié de celle prédite par la théorie bidimensionnelle à cause des effets 3D de l'écoulement.

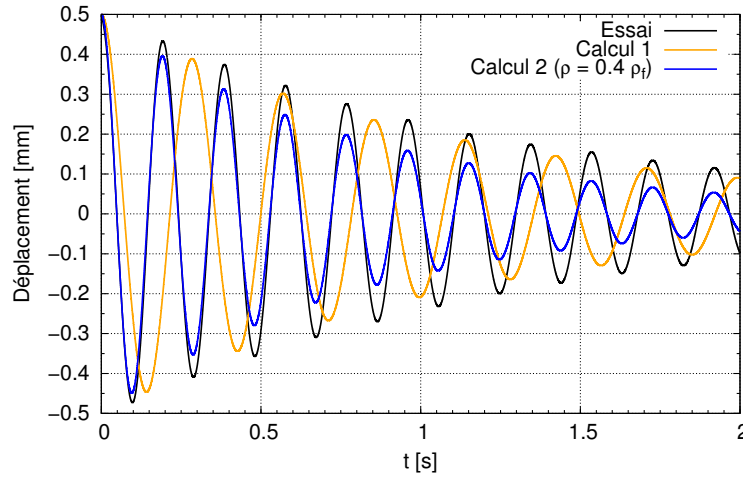


FIGURE 6.30 – Comparaison entre déplacement expérimental et solution numérique 2D « Cast3M Navier-Stokes » 2D pour un essai en eau avec  $a_0 = 0.5$  mm

Pour prendre en compte ces effets, il faut considérer que l'écoulement est bidimensionnel seulement sur une hauteur d'environ 200 mm, qui représente 40% de la hauteur de l'hexagone. En conséquence, la force fluide doit être réduite de 60% par rapport à celle trouvée dans la première simulation. Pour ce faire, nous réduisons la densité de l'eau à 40% de la densité réelle. Avec cette astuce, nous obtenons une évolution du déplacement de la structure (« Calcul 2 ») qui a la même fréquence d'oscillation que celle de l'essai (Fig. 6.30).

Ceci veut dire que l'effort fluide est reparté uniformément sur la partie centrale de l'hexagone, tandis qu'il est réduit aux extrémités de l'hexagone à cause de l'écoulement à « jambage ». Ce type d'écoulement induit une variation de pression dynamique et donc un changement de la fréquence de vibration. En revanche, la fréquence n'est pas influencée par la composante visqueuse de l'effort fluide liée à l'écoulement 3D, qui joue sur l'amortissement de la structure. Dans nos simulations, l'amortissement est surestimé. En effet, la valeur du rapport entre la hauteur  $H$  de l'hexagone et  $R_1$ , le rayon du cercle équivalent, est environ 8. Par la théorie de Mulcahy [33] (Éq. 2.10), cette valeur indique que les effets dissipatifs le long de la hauteur sont plus importants que ceux dus à l'écoulement bidimensionnel. En conséquence, ces effets ne peuvent être pris en

compte que par un modèle 3D utilisant les équations de Navier-Stokes.

Si nous considérons les simulations effectuées par le modèle « Cast3M  $up\phi$  » pour une hauteur de 200 mm, la fréquence en eau trouvée est légèrement plus élevée mais assez proche de la valeur expérimentale (voir Tab.6.4). Ce résultat est cohérent avec l'analyse effectuée lors de la validation du code : le modèle « Cast3M  $up\phi$  » sous-estime l'énergie cinétique dans le système.

	$m_s$ [kg]	$k_s$ [N/m]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$f_{eau}$ [Hz]
Essai	8.84	45116	1000	5.21
Modèle	$m_s$ [kg/m]	$k_s$ [N/m <sup>2</sup> ]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$f_{eau}$ [Hz]
« Cast3M N-S » 2D	17.68	90232	1000	3.45
« Cast3M NS » 2D	17.68	90232	400	5.20
« Cast3M $up\phi$ »	17.68	90232	1000	3.85
« Cast3M $up\phi$ »	17.68	90232	400	5.60

TABLE 6.4 – Résumé des fréquences en eau trouvées dans les simulations avec modèles bidimensionnels pour des essais d'oscillation libre en eau sur PISE-1a

#### 6.2.6.2 Comparaison essai - « Cast3M $up\phi$ » 3D

Dans le modèle « Cast3M  $up\phi$  » 3D, nous représentons seulement la partie hexagonale de l'assemblage de la maquette de PISE-1a entouré par la cuve hexagonale (Fig.6.31). Il est possible

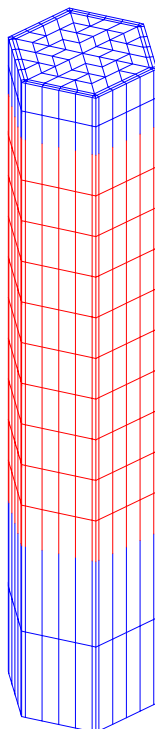


FIGURE 6.31 – Maillage utilisé pour le modèle « Cast3M  $up\phi$  » 3D; en rouge, la partie d'eau autour de l'hexagone

d'utiliser différentes conditions limites pour la pression. Alors, nous listons deux des conditions que nous avons considérées dans nos calculs :

- « 3D« Cast3M  $up\phi$  »-I2D » : aucun volume d'eau en bas ou en haut de l'hexagone. La pression est imposée nulle sur la surface à ras de la base ou de la tête de l'hexagone ;
- « 3D« Cast3M  $up\phi$  » » : au-dessous de l'hexagone, la hauteur du support bilame est remplacée par le fluide ; au-dessus, nous considérons un volume correspondant à une hauteur de 70 mm. La condition de surface libre est imposée à la surface extrême.

Nous reportons dans le Tab. 6.5 les valeurs trouvées dans les simulations pour les comparer avec l'essai d'oscillations libres avec un déplacement initial de 0.5 mm (voir données dans le Tab. 6.4). Dans tous les cas, la masse de l'hexagone et la raideur sont respectivement la masse volumique qui se déplace dans la maquette ( $m_s = 8.84$  kg) et la raideur correspondante ( $k_s = 45\,116$  N m<sup>-1</sup>). Nous pouvons constater que les simulations 1 et 3 trouvent une fréquence très proche des cas

	Modèle	H [m]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	Fréquence $f_{H_2O}$ [Hz]
1	3D« Cast3M $up\phi$ »-I2D	0.5	1000	3.88
2	3D« Cast3M $up\phi$ »-I2D	0.22	1000	5.46
3	3D« Cast3M $up\phi$ »-I2D	0.5	400	5.65
4	3D« Cast3M $up\phi$ »	0.5	1000	4.40
5	3D« Cast3M $up\phi$ »	0.5	400	6.28
6	3D« Cast3M $up\phi$ »	0.5	675	5.18

TABLE 6.5 – Résumé des fréquences en eau trouvées dans les simulations avec les deux modèles tridimensionnels pour des essais d'oscillation libre en eau sur PISE-1a

« Cast3M  $up\phi$  » bidimensionnels décrits dans le Tab.6.4. En effet, la condition de pression nulle aux surfaces au ras de l'hexagone implique une pression constante sur la hauteur de l'hexagone. Ceci induit un écoulement bidimensionnel, bien que la structure soit représentée en 3D.

Pour la simulation 2 nous considérons seulement la hauteur où l'écoulement est censé être bidimensionnel : la fréquence d'oscillation se rapproche de la fréquence expérimentale.

Par la condition de surface libre, la simulation 4 retrouve une fréquence d'oscillation inférieure à celle de l'essai mais supérieure à la fréquence de 3.85 Hz obtenue par le modèle 2D. Cela veut dire que l'effet d'une quantité d'eau tête de l'hexagone n'est pas négligeable.

Néanmoins, le modèle sous-estime d'environ 30% la force fluide. Pour se rapprocher de la fréquence expérimentale, il faut donc réduire la densité de l'eau de 30% (simulation 6).

La différence entre l'essai et le modèle « Cast3M  $up\phi$  » 3D peut être expliquée par le fait que l'écoulement est rotationnel [40], alors que le modèle suppose que l'écoulement est irrotationnel. Pour cela, le modèle surestime la force fluide par rapport à celle dans les essais. Comme cette force doit diminuer lors des essais à faible niveaux d'eau, nous avons cherché à modéliser les essais avec différentes hauteurs d'eau. Les données de la maquette sont toujours les mêmes et les fréquences trouvées sont résumées dans le Tab. 6.6. L'erreur entre les fréquences diminue pour des niveaux d'eau faibles : la force fluide diminue avec la hauteur d'eau présente dans la maquette. Les effets d'inertie fluide sont donc moins forts et le modèle se rapproche de la fréquence expérimentale. En plus, le modèle est capable de reproduire la déformation de la surface libre du fluide, comme montré sur la Fig. 6.32.



	Essai $f$ [Hz]	3D« Cast3M $up\phi$ » $f$ [Hz]	Erreur %
Ras de l'hexagone	5.32	4.52	15
1/2 hauteur de l'hexagone	7.84	6.75	14
1/4 hauteur de l'hexagone	10.69	9.70	10

TABLE 6.6 – Résumé des fréquences en eau trouvées dans les simulations avec le modèle tridimensionnel « Cast3M  $up\phi$  » pour des essais d'oscillation libre sur PISE-1a pour différentes hauteurs d'eau

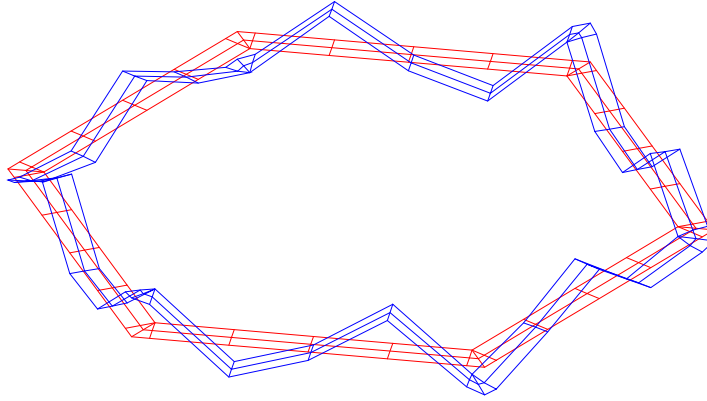


FIGURE 6.32 – Déformation de la surface libre pour une cuve remplie au 1/4 de la hauteur dans le cas d'une oscillation libre : en rouge la section au repos et, en bleue, la section déformée

### 6.2.7 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons présenté la conception et le dimensionnement des deux installations expérimentales : la maquette mono-assemblage PISE-1a et la maquette 19 assemblages (deux couronnes) PISE-2c.

Ensuite, nous avons présenté les essais de vibration libre en air et en eau effectués avec la maquette mono-assemblage PISE-1a. Les essais en air montrent une forte plage de variation des données sur la fréquence et sur la taux d'amortissement. En revanche cette plage n'est pas notable pour les oscillations en eau. Ceci est dû à la présence du fluide en cas de fort confinement.

Les visualisations par technique PIV ont établi que l'écoulement n'est bidimensionnel que dans la partie centrale de l'hexagone. En effet, un écoulement vertical se produit en bas et en tête de l'hexagone, nommé « jambage ». Cet écoulement disparaît à une distance de l'ordre du rayon externe du cylindre équivalent, comme prédit dans [40].

L'écart entre la masse ajoutée prédite par Chen [8] et celles déduites des données expérimentales peut être causé par ces effets dus à l'écoulement fluide.

Les tests ultérieurs où la hauteur d'eau varie dans l'inter-assemblage confirment que les effets de fluide diminuent avec la hauteur, jusqu'à atteindre à la fréquence d'oscillation en air. Nous avons reproduit les essais avec le modèle « Cast3M Navier-Stokes » 2D et le modèle 2D « Cast3M  $up\phi$  ». Nous ne retrouvons la fréquence d'oscillation dans les deux modèles que dans le cas où la force fluide est réduite de 40%. Cette valeur peut être interprétée comme le pourcentage de la hauteur de la maquette où l'écoulement est réellement 2D. L'amortissement est en revanche

toujours surestimé. Dans le modèle 3D « Cast3M *upφ* », capable de prendre en compte l'effet de la surface libre, la fréquence obtenue s'approche de la fréquence d'oscillation expérimentale mais elle est encore sous-estimée. En effet, nous n'obtenons une valeur similaire que lorsque la force fluide est réduite de 30%.



## Conclusions

Cette thèse vise à améliorer la compréhension du comportement d'un cœur de réacteur à neutrons rapides refroidi au sodium (RNR-Na) lors de vibrations par l'analyse des phénomènes d'interaction fluide-structure.

Notamment, nous avons analysé le gerbage du cœur de Phénix lors des AURNs et les oscillations sismiques dans le cadre du projet ASTRID.

Pour ce faire, trois approches ont été suivies : élaboration de solutions analytiques, développement de modèles numériques et réalisation d'expériences.

Des solutions analytiques de champs de vitesse et déplacement de la structure ont été réalisées pour une géométrie cylindrique en très forts confinement.

Nous avons conçu et dimensionné deux installations expérimentales : la maquette mono-assemblage PISE-1a et la maquette 19 assemblages (deux couronnes) PISE-2c. La première maquette a été exploitée afin de comprendre comme l'écoulement fluide se déroule dans un faible espace inter-assemblage.

Nous avons développé un modèle numérique bidimensionnel résolvant les équations de Navier-Stokes couplées avec les équations de la dynamique des structures, applicable à la géométrie hexagonale ainsi que cylindrique.

### Apport original de cette thèse

Grâce à l'analyse phénoménologique, nous avons pu définir une carte d'écoulement adaptée au cas de forts confinements pour un écoulement bidimensionnel d'un fluide incompressible et visqueux entre deux cylindres concentriques. Pour des caractéristiques déduites de celles de Phénix (sodium liquide et équivalence de l'aire transversale entre cylindre et hexagone), cette carte nous permet de montrer que les équations d'Euler complètes ou linéarisées décrivent l'écoulement, selon l'amplitude d'oscillation.

À partir de cette analyse, nous avons obtenu une solution analytique du déplacement d'un cylindre dans un fluide visqueux très confiné pour un mouvement bidimensionnel imposé, simplifiée par rapport aux solutions présentes dans la littérature. Les profils de vitesse montrent clairement que, en fonction du jeu, le régime d'écoulement change : plus le jeu est grand, plus les effets visqueux sont confinés et proches des parois ; plus le jeu est faible, plus le profil de vitesse se

rapproche d'un profil de type Poiseuille.

Pour la première fois à notre connaissance, pour le cas d'oscillation libre, une solution analytique de champ de vitesse a été réalisée pour de très forts confinement en configuration cylindrique.

Notre modèle « Cast3M Navier-Stokes » 2D a été appliqué à la géométrie hexagonale, après être validé pour le mouvement forcé et libre en géométrie cylindrique. Des tourbillons derrière les arêtes vives de l'hexagone apparaissent, qui modifient les coefficients de masse ajoutée et d'amortissement ajouté.

Grâce à l'analyse des données expérimentales, nous avons visualisé par technique PIV un écoulement vertical aux sections d'extrémité de l'hexagone. Cet écoulement est responsable d'une hausse de la fréquence par rapport à la valeur prédite par la théorie. En effet, pour retrouver la fréquence d'oscillation expérimentale avec les modèles numériques bidimensionnels « Cast3M Navier-Stokes » et « Cast3M  $up\phi$  », il faut réduire la masse ajoutée au 40% par rapport à celle théorique. Cette valeur peut être interprétée comme le pourcentage de la hauteur de la maquette où l'écoulement est réellement 2D. L'amortissement est en revanche toujours surestimé.

Dans le modèle « Cast3M  $up\phi$  » 3D, capable de prendre en compte l'effet de la surface libre, la fréquence obtenue s'approche à la fréquence d'oscillation expérimentale mais elle est encore sous-estimée. En effet, nous n'obtenons une valeur similaire que lorsque la force fluide est réduite de 30%.

## Perspectives

Sur la maquette PISE-1a, d'autres tests sont prévus à court terme : avec de l'huile d'olive à la place de l'eau, des vibrations libres seront réalisées pour analyser les effets visqueux ; puis, les tests d'injection d'eau seront effectués. Les deux types d'essais seront modélisés avec les outils déjà à disposition. Pour les essais d'injection, des simulations ont déjà été effectuées, qui montrent comment les effets fluides imposent la fréquence de vibration de la structure.

Dans la suite, l'objectif sera d'exploiter la maquette PISE-2c avec les assemblages montés sur le support bilame, en réalisant les essais des vibrations libres et d'injection. Le modèle 2D « Cast3M Navier-Stokes » sera développé pour représenter les deux couronnes.

Le montage des assemblages hexagonaux sur le support mono-lame, déjà dimensionné, est prévu. Tous les tests réalisés avec le support bilame doivent être répétés avec le mono-lame, soit avec PISE-1a et PISE-2c. Une extension tridimensionnelle du modèle « Cast3M Navier-Stokes » est donc envisageable pour modéliser PISE-1a mono-lame.

# Solution analytique pour une oscillation imposée en milieu fortement confiné

Nous détaillons les calculs de la Section 3.3 qui nous permettent de trouver le système d'équations de la Section 3.1 et la solution analytique dans le cas de vibrations imposées d'une structure dans un fluide incompressible et visqueux initialement au repos.

## A.1 Système d'équations en coordonnées cylindriques

Considérons deux cylindres concentriques de longueur infinie (problème bidimensionnel), de rayons respectifs  $R_1$  et  $R_2$  (Fig. A.1), dans un milieu fluide incompressible de densité  $\rho$  et de viscosité cinématique  $\nu$ . L'anneau occupé par le fluide (jeu) est de dimension  $b = R_2 - R_1$ . Le jeu  $b$  est très petit par rapport au rayon externe  $R_2$  : cette condition est la seule hypothèse restrictive qui est utilisée dans cette discussion. Le cylindre extérieur est fixe alors que le cylindre

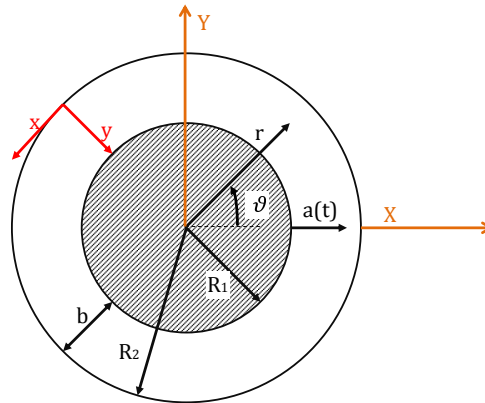


FIGURE A.1 – Deux cylindres concentriques séparés par un milieu fluide

interne est animé d'un mouvement oscillatoire  $\vec{a}(t) = \vec{a}_0 \sin \omega t$ , selon la direction horizontale, où la fréquence d'oscillation  $\omega$  est fixée.

Le système d'équations est composé du bilan de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, des conditions limites et des conditions initiales. Les champs de vitesse et de pression sont :

$$\vec{v} = u_r(r, \theta, t)\hat{e}_r + u_\theta(r, \theta, t)\hat{e}_\theta \quad \text{et} \quad P = p_0 + p(r, \theta, t) \quad (\text{A.1})$$

Le système à résoudre est donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\theta u_r}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) \\ u_r|_{r=R_2} = 0 \quad \forall \theta, t \\ u_\theta|_{r=R_2} = 0 \quad \forall \theta, t \\ u_r|_{r=R_1} = -\dot{a} \sin \theta \quad \forall \theta, t \\ u_\theta|_{r=R_1} = -\dot{a} \cos \theta \quad \forall \theta, t \\ a_s|_{t=0} = a_0 \quad \forall \theta, r \end{array} \right. \quad (\text{A.2})$$

Nous procédons à un changement de coordonnées de  $(r, \theta)$  à  $(x, y)$  :

$$x = R_2 \theta \quad y = R_2 - r \quad \hat{e}_x = \hat{e}_\theta \quad \hat{e}_y = -\hat{e}_r \quad (\text{A.3})$$

En conséquence :

$$u_r = -v \quad u_\theta = u \quad \frac{\partial \cdot}{\partial r} = -\frac{\partial \cdot}{\partial y} \quad \frac{\partial^2 \cdot}{\partial r^2} = -\frac{\partial^2 \cdot}{\partial y^2} \quad \frac{\partial \cdot}{\partial \theta} = \frac{\partial \cdot}{\partial x}$$

Le système se transforme donc comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{v}{(R_2 - y)} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{R_2}{(R_2 - y)} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{R_2}{(R_2 - y)} u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{u^2}{(R_2 - y)} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \\ \quad \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{R_2^2}{(R_2 - y)^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{2R_2}{(R_2 - y)^2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{(R_2 - y)} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{v}{(R_2 - y)^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{R_2}{(R_2 - y)} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{uv}{(R_2 - y)} = -\frac{1}{\rho} \frac{R_2}{(R_2 - y)} \frac{\partial p}{\partial x} + \\ \quad \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{R_2^2}{(R_2 - y)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{2R_2}{(R_2 - y)^2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{(R_2 - y)} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{u}{(R_2 - y)^2} \right) \\ u|_{y=0} = 0 \quad \forall x, t \\ v|_{y=0} = 0 \quad \forall x, t \\ u|_{y=b} = \dot{a} \sin(x/R_2) \quad \forall x, t \\ v|_{y=b} = -\dot{a} \cos(x/R_2) \quad \forall x, t \\ a_s|_{t=0} = a_0 \quad \forall x, y \end{array} \right. \quad (\text{A.4})$$

Afin de procéder à une analyse dimensionnelle, les substitutions suivantes sont appliquées :

$$\begin{aligned} x = R_2 \bar{x} \quad y = b \bar{y} \quad t = \frac{\bar{t}}{\omega} \quad \frac{\partial \cdot}{\partial x} = \frac{1}{R_2} \frac{\partial \cdot}{\partial \bar{x}} \quad \frac{\partial \cdot}{\partial y} = \frac{1}{b} \frac{\partial \cdot}{\partial \bar{y}} \quad \frac{\partial \cdot}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \frac{\partial \cdot}{\partial \bar{t}} \\ u = U \bar{u} \quad v = V \bar{v} \quad p = \delta p \bar{p} \quad a_s(t) = a_0 \bar{a}_s \sin(\bar{t}) \end{aligned}$$

qui fournissent le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} [(R_2 - b\bar{y})V\bar{v}] + U \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = 0 \\
 \omega V \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \frac{V^2}{b} \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{UV\bar{u}}{(R_2 - b\bar{y})} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \frac{U^2 \bar{u}^2}{R_2 - b\bar{y}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{b} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \\
 \quad \nu \left[ \frac{V}{b^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{V}{(R_2 - b\bar{y})^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{V}{b(R_2 - b\bar{y})} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{2U}{(R_2 - b\bar{y})^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} - \frac{V\bar{v}}{(R_2 - b\bar{y})^2} \right] \\
 \omega U \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \frac{UV}{b} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{U^2 \bar{u}}{(R_2 - b\bar{y})} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} - \frac{UV\bar{u}\bar{v}}{R_2 - b\bar{y}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{(R_2 - b\bar{y})} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \\
 \quad \nu \left[ \frac{U}{b^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{U}{(R_2 - b\bar{y})^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{U}{b(R_2 - b\bar{y})} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{2V}{(R_2 - b\bar{y})^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} - \frac{U\bar{u}}{(R_2 - b\bar{y})^2} \right] \\
 \bar{u}|_{\bar{y}=0} = 0 \quad \forall x, t \\
 \bar{v}|_{\bar{y}=0} = 0 \quad \forall x, t \\
 \bar{u}|_{\bar{y}=1} = \frac{a_0 \omega}{U} \dot{\bar{a}} \sin(\bar{x}) \quad \forall x, t \\
 \bar{v}|_{\bar{y}=1} = -\frac{a_0 \omega}{V} \dot{\bar{a}} \cos(\bar{x}) \quad \forall x, t \\
 \bar{a}_s|_{\bar{t}=0} = a_0 \quad \forall x, y
 \end{array} \right. \quad (\text{A.5})$$

Les groupes adimensionnés suivants apparaissent :

$$\eta = \frac{b}{R_2} \ll 1 \quad \varepsilon = \frac{a_0}{b} \quad \text{St}_1 = \frac{R_1 \omega}{U} \quad \text{Re} = \frac{Ub}{\nu}$$

où le paramètre  $\eta$  représente le confinement et donc est très petits par rapport à 1.

Ceci conduit à simplifier l'équation de la conservation de la masse Éq. A.6 :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left[ \underbrace{(1/\eta - \bar{y})}_{\frac{1}{\eta} \gg 1} V\bar{v} \right] + U \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = \frac{V}{\eta} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + U \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = 0 \quad (\text{A.6})$$

L'analyse dimensionnelle de l'Éq. A.6 permet de définir la relation entre les deux échelles de vitesse :

$$V = \eta U \quad (\text{A.7})$$



Alors le système complet peut se simplifier :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \\ St_1 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{\eta} \bar{u}^2 = -\frac{1}{\eta^2} \frac{\delta p}{\rho U^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{\eta Re} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \\ St_1 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \left( \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right) = -\frac{\delta p}{\rho U^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\eta Re} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \\ \bar{u}|_{\bar{y}=0} = 0 \quad \forall x, t \\ \bar{v}|_{\bar{y}=0} = 0 \quad \forall x, t \\ \bar{u}|_{\bar{y}=1} = St_1 \varepsilon \dot{\bar{a}} \sin(\bar{x}) \quad \forall x, t \\ \bar{v}|_{\bar{y}=1} = -\frac{St_1}{\eta} \varepsilon \dot{\bar{a}} \cos(\bar{x}) \quad \forall x, t \\ \bar{a}_s|_{\bar{t}=0} = a_0 \quad \forall x, y \end{array} \right. \quad (A.8)$$

Compte tenu de l'hypothèse de très fort confinement, le système complet peut être écrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = 0 \\ St \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \left( \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right) = -\frac{\delta p}{\rho U^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\eta Re} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \\ \bar{v}|_{\bar{y}=0} = 0 \quad \forall \bar{x}, \bar{t} \\ \bar{u}|_{\bar{y}=0} = 0 \quad \forall \bar{x}, \bar{t} \\ \bar{v}|_{\bar{y}=1} = -\dot{\bar{a}} \cos(\bar{x}) \quad \forall \bar{x}, \bar{t} \\ \bar{u}|_{\bar{y}=1} = 0 \quad \forall \bar{x}, \bar{t} \\ \bar{v}|_{\bar{t}=0} = 1 \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \end{array} \right. \quad (A.9)$$

## A.2 Solution analytique du champ de vitesse et champ de pression

Admettons que les champs de vitesse et de pression aient une solution à variables séparées en espace et en temps :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \tilde{u}(\bar{x}, \bar{y}) e^{i\bar{t}} \\ \bar{v}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \tilde{v}(\bar{x}, \bar{y}) e^{i\bar{t}} \\ \bar{p}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \tilde{p}(\bar{x}, \bar{y}) e^{i\bar{t}} \end{array} \right. \quad (A.10)$$

Nous insérons les expressions précédentes dans le système d'Éq. 3.4.

Le bilan de masse nous donne :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{x}} = -\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \bar{y}} \quad (\text{A.11})$$

Du bilan de la quantité de mouvement le long  $\bar{y}$  résulte que la pression ne dépend que de la coordonnée  $\bar{x}$ . Ceci nous indique que la pression est constante pour un rayon donné et ne varie qu'en fonction de l'angle  $\theta$ .

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \bar{y}}(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \rightarrow \tilde{p}(\bar{x}, \bar{y}) = \tilde{p}(\bar{x}) \quad (\text{A.12})$$

De la deuxième équation de quantité de mouvement, nous obtenons :

$$\sigma i \tilde{u}(\bar{x}, \bar{y}) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \bar{x}}(\bar{x}) + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \bar{y}^2}(\bar{x}, \bar{y}) \quad (\text{A.13})$$

où  $\sigma$  est défini comme dans le Chapitre 3.1.

La solution de cette équation passe par le changement de variable suivant :

$$\bar{\xi} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \bar{x}} + \sigma i \tilde{u}(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow \tilde{u} = \frac{1}{\sigma i} \left( \bar{\xi} - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \bar{x}} \right) \quad (\text{A.14})$$

Nous arrivons à l'expression :

$$\frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial \bar{y}^2} \frac{1}{\sigma i} = \bar{\xi} \quad (\text{A.15})$$

dont la solution est :

$$\bar{\xi} = c_1(\bar{x})e^{\sqrt{\sigma i} \bar{y}} + c_2(\bar{x})e^{-\sqrt{\sigma i} \bar{y}} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \bar{x}} = \sigma i \tilde{u} \quad (\text{A.16})$$

qui fournit l'expression de la solution du champ de vitesse :

$$\begin{cases} \tilde{u} = \frac{1}{\sigma i} \left( \frac{\partial c_1(\bar{x})}{\partial \bar{x}} e^{\sqrt{\sigma i} \bar{y}} + \frac{\partial c_2(\bar{x})}{\partial \bar{x}} e^{-\sqrt{\sigma i} \bar{y}} - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \bar{x}} \right) \\ \tilde{v} = -\frac{1}{\sigma i} \left( \frac{1}{\sqrt{\sigma i}} \frac{\partial c_1(\bar{x})}{\partial \bar{x}} e^{\sqrt{\sigma i} \bar{y}} - \frac{1}{\sqrt{\sigma i}} \frac{\partial c_2(\bar{x})}{\partial \bar{x}} e^{-\sqrt{\sigma i} \bar{y}} - \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial \bar{x}^2} \bar{y} + c_3(\bar{x}) \right) \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

Les coefficients  $c_1(\bar{x})$ ,  $c_2(\bar{x})$  et  $c_3(\bar{x})$  sont définis par les conditions aux frontières :

$$\begin{cases} c_1(\bar{x}) = \frac{\sigma i \sqrt{\sigma i}}{2} \sin \bar{x} \left( 1 - \tanh\left(\frac{\sqrt{\sigma i}}{2}\right) \right) \left[ \frac{1 + \eta \left[ \frac{1}{\sqrt{\sigma i}} + \left( 1 - \tanh\left(\frac{\sqrt{\sigma i}}{2}\right) \right) / 2 \tanh\left(\frac{\sqrt{\sigma i}}{2}\right) \right] \sqrt{\sigma i}}{2 \tanh\left(\frac{\sqrt{\sigma i}}{2}\right) - \sqrt{\sigma i}} - \frac{\eta}{\tanh\left(\frac{\sqrt{\sigma i}}{2}\right)} \right] \\ c_2(\bar{x}) = \frac{\sigma i \sin \bar{x}}{2} \frac{1 + \tanh\left(\frac{\sqrt{\sigma i}}{2}\right)}{2 \tanh\left(\frac{\sqrt{\sigma i}}{2}\right) - \sqrt{\sigma i}} \left\{ 1 + \eta \left[ \frac{1}{\sqrt{\sigma i}} + \left( 1 - \tanh\left(\frac{\sqrt{\sigma i}}{2}\right) \right) / 2 \tanh\left(\frac{\sqrt{\sigma i}}{2}\right) \right] \right\} \\ c_3(\bar{x}) = -\frac{\sigma i}{\sqrt{\sigma i}} \cos \bar{x} \left\{ \eta \frac{1 - \tanh\left(\frac{\sqrt{\sigma i}}{2}\right)}{2 \tanh\left(\frac{\sqrt{\sigma i}}{2}\right)} + \frac{1 + \eta \left[ \frac{1}{\sqrt{\sigma i}} + \left( 1 - \tanh\left(\frac{\sqrt{\sigma i}}{2}\right) \right) / 2 \tanh\left(\frac{\sqrt{\sigma i}}{2}\right) \right] \tanh\left(\frac{\sqrt{\sigma i}}{2}\right) \sqrt{\sigma i}}{2 \tanh\left(\frac{\sqrt{\sigma i}}{2}\right) - \sqrt{\sigma i}} \right\} \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

Il reste à substituer ces coefficients dans les expressions de  $\tilde{u}, \tilde{v}$  et  $\tilde{p}$  pour arriver aux solutions analytiques de l'Équation 3.13.



# Annexe **B**

## Solution analytique pour une oscillation libre en milieu fortement confiné

Nous détaillons dans cette annexe les calculs de la Section 3.2 qui nous permettent de trouver la solution analytique dans le cas d'oscillations libres d'une structure placée dans un fluide incompressible et visqueux initialement au repos.

### B.1 Système d'équations en coordonnées cylindriques

La géométrie est la même que celle utilisée dans l'annexe A. Cependant, nous faisons référence à la géométrie de la Fig. A.1.

Le système d'équations est composé par le bilan de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, l'équation de la dynamique des structures, les conditions aux frontières et les conditions initiales. Les champs de vitesse et de pression sont :

$$\vec{v} = u_r(r, \theta, t)\hat{e}_r + u_\theta(r, \theta, t)\hat{e}_\theta \quad \text{et} \quad P = p_0 + p(r, \theta, t) \quad (\text{B.1})$$

Le système à résoudre est donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\theta u_r}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) \\ m_s \ddot{a}_s + k_s \dot{a}_s + c_s a_s = - \int_{\Gamma_s} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{n}) \cdot \hat{e}_X \, d\Gamma_s \\ u_r|_{r=R_2} = 0 \quad \forall \theta, t \\ u_\theta|_{r=R_2} = 0 \quad \forall \theta, t \\ u_r|_{r=R_1} = -\dot{a} \sin \theta \quad \forall \theta, t \\ u_\theta|_{r=R_1} = -\dot{a} \cos \theta \quad \forall \theta, t \\ a_s|_{t=0} = a_0 \quad \forall \theta, r \end{array} \right. \quad (\text{B.2})$$

où

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} = -p\mathbf{I} + 2\mu \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) - r\frac{\partial u_r}{\partial \theta} \\ r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) - r\frac{\partial u_r}{\partial \theta} & r\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Nous opérons le changement de coordonnées de  $(r, \theta)$  pour  $(x, y)$  :

$$x = R_2\theta \quad y = R_2 - r \quad \hat{e}_x = \hat{e}_\theta \quad \hat{e}_y = -\hat{e}_r \quad (\text{B.4})$$

En conséquence :

$$u_r = -v \quad u_\theta = u \quad \frac{\partial \cdot}{\partial r} = -\frac{\partial \cdot}{\partial y} \quad \frac{\partial^2 \cdot}{\partial r^2} = -\frac{\partial^2 \cdot}{\partial y^2} \quad \frac{\partial \cdot}{\partial \theta} = \frac{\partial \cdot}{\partial x}$$

Le système s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{v}{(R_2 - y)} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{R_2}{(R_2 - y)} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{R_2}{(R_2 - y)} u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{u^2}{(R_2 - y)} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \quad + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{R_2^2}{(R_2 - y)^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{2R_2}{(R_2 - y)^2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{(R_2 - y)} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{v}{(R_2 - y)^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{R_2}{(R_2 - y)} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{uv}{(R_2 - y)} = -\frac{1}{\rho} \frac{R_2}{(R_2 - y)} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \quad + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{R_2^2}{(R_2 - y)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{2R_2}{(R_2 - y)^2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{(R_2 - y)} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{u}{(R_2 - y)^2} \right) \\ m_s \ddot{a}_s + c_s \dot{a}_s + k_s a_s = - \int_{\Gamma_s} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{n}) \cdot \hat{e}_X \, d\Gamma_s \\ u|_{y=0} = 0 \quad \forall x, t \\ v|_{y=0} = 0 \quad \forall x, t \\ u|_{y=b} = \dot{a} \sin(x/R_2) \quad \forall x, t \\ v|_{y=b} = -\dot{a} \cos(x/R_2) \quad \forall x, t \\ a_s|_{t=0} = a_0 \quad \forall x, y \end{array} \right. \quad (\text{B.5})$$

où

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}$$

et  $\mathbf{D}$  est :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left[ (R_2 - y) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u}{R_2 - y} \right) - \frac{R_2}{R_2 - y} \frac{\partial v}{\partial x} \right] \\ \frac{1}{2} \left[ (R_2 - y) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u}{R_2 - y} \right) - \frac{R_2}{R_2 - y} \frac{\partial v}{\partial x} \right] & \frac{R_2}{R_2 - y} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{v}{R_2 - y} \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

Afin de procéder à une analyse dimensionnelle, les substitutions suivantes sont effectuées :

$$\begin{aligned} x &= R_2 \bar{x} & y &= b \bar{y} & t &= \frac{\bar{t}}{\omega} & \frac{\partial \cdot}{\partial x} &= \frac{1}{R_2} \frac{\partial \cdot}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial \cdot}{\partial y} &= \frac{1}{b} \frac{\partial \cdot}{\partial \bar{y}} & \frac{\partial \cdot}{\partial t} &= \frac{1}{\tau} \frac{\partial \cdot}{\partial \bar{t}} \\ u &= U \bar{u} & v &= V \bar{v} & p &= \delta p \bar{p} & a_s(t) &= a_0 \bar{a}_s \sin(\bar{t}) \end{aligned}$$

Les groupes adimensionnés qui apparaissent sont :

$$\eta = \frac{b}{R_2} \ll 1 \quad \varepsilon = \frac{a_0}{b} \quad \text{St}_2 = \frac{R_2/U}{\tau} \quad \text{Re} = \frac{Ub}{\nu}$$

L'équation de conservation de la masse nous permet encore de déterminer l'échelle de  $V$  :

$$V = \eta U \quad (\text{B.7})$$

Finalement :

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \bar{y}} [(1 - \eta \bar{y}) V \bar{v}] + \eta U \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = 0 \\ & \text{St}_2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \frac{V}{\eta U} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\bar{u}}{1 - \eta \bar{y}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} - \frac{V}{U} \frac{\bar{u} \bar{v}}{1 - \eta \bar{y}} = - \frac{\delta p}{\rho U^2 (1 - \eta \bar{y})} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \\ & \quad + \frac{\eta}{\text{Re}} \left[ \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left( \frac{1}{1 - \eta \bar{y}} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} [(1 - \eta \bar{y}) \bar{u}] \right) \right] + \frac{1}{(1 - \eta \bar{y})^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{V}{U} \frac{2}{(1 - \eta \bar{y})^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \\ & \text{St}_2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \frac{V}{\eta U} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{\bar{u}}{1 - \eta \bar{y}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} - \frac{U}{V} \frac{\bar{u}^2}{1 - \eta \bar{y}} = - \frac{\delta p}{\eta \rho U V (1 - \eta \bar{y})} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \\ & \quad + \frac{\eta}{\text{Re}} \left[ \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left( \frac{1}{1 - \eta \bar{y}} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} [(1 - \eta \bar{y}) \bar{v}] \right) \right] + \frac{1}{(1 - \eta \bar{y})^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{U}{V} \frac{2}{(1 - \eta \bar{y})^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \\ & \frac{m_s a_0}{\tau^2} \ddot{\bar{a}}_s + \frac{c_s a_0}{\tau} \dot{\bar{a}}_s + k_s a_0 \bar{a}_s = - \int_{\Gamma_s} (\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_X \, d\Gamma_s \\ & \bar{u}|_{\bar{y}=0} = 0 \quad \forall \bar{x}, \bar{t} \\ & \bar{v}|_{\bar{y}=0} = 0 \quad \forall \bar{x}, \bar{t} \\ & \bar{u}|_{\bar{y}=1} = \varepsilon \eta \text{St}_2 \dot{\bar{a}} \sin \bar{x} \quad \forall \bar{x}, \bar{t} \\ & \bar{v}|_{\bar{y}=1} = -\varepsilon \eta \text{St}_2 \frac{U}{V} \dot{\bar{a}} \cos \bar{x} \quad \forall \bar{x}, \bar{t} \\ & \bar{a}_s|_{\bar{t}=0} = 1 \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \end{aligned} \right. \quad (\text{B.8})$$

Pour des très forts confinements, la force de surface prend la forme :

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_X &= \\ & \left( \rho U^2 \begin{bmatrix} -\frac{\delta p}{\rho U^2} & +2 \frac{\eta}{\text{Re}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \\ \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} & -\frac{\delta p}{\rho U^2} + 2 \frac{\eta^2}{\text{Re}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\varepsilon \eta \dot{\bar{a}} \sin \bar{x} \\ 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \hat{\mathbf{e}}_X \\ & \xrightarrow{\eta \ll 1} -\rho U^2 \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \sin \bar{x} + \delta p \bar{p} \cos \bar{x} \sim \delta p \bar{p} \cos \bar{x} \quad (\text{B.9}) \end{aligned}$$

Le système se réduit donc à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \\ \text{St}_2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \frac{\bar{u}^2}{\eta} = -\frac{1}{\eta^2} \frac{\delta p}{\rho U^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{\eta \text{Re}} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \\ \text{St}_2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \left( \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right) = -\frac{\delta p}{\rho U^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\eta \text{Re}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \\ m_s \frac{a_0}{\tau^2} \ddot{\bar{a}} + c_s \frac{a_0}{\tau} \dot{\bar{a}} + k_s a_0 \bar{a} = -R_2 \delta p \int_0^{2\pi} \bar{p}|_{\bar{y}=1} \cos \bar{x} d\bar{x} \\ \bar{v}|_{\bar{y}=0} = 0 \quad \forall \bar{x}, \bar{t} \\ \bar{u}|_{\bar{y}=0} = 0 \quad \forall \bar{x}, \bar{t} \\ \bar{v}|_{\bar{y}=1} = -\cos(\bar{x}) \quad \forall \bar{x}, \bar{t} \\ \bar{u}|_{\bar{y}=1} = 0 \quad \forall \bar{x}, \bar{t} \\ \bar{v}|_{\bar{t}=0} = 1 \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \end{array} \right. \quad (\text{B.10})$$

## B.2 Solution pour un écoulement fluide visqueux

Partant de l'Éq.3.7, nous procédons par transformation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \bar{y}^2} - \zeta s \hat{u} = \frac{\partial \hat{p}}{\partial \bar{x}} \quad (\text{B.11})$$

Cette équation a comme solution :

$$\hat{u} = C_1 \exp(-\sqrt{\zeta s} \bar{y}) + C_2 \exp(\sqrt{\zeta s} \bar{y}) - \frac{1}{\zeta s} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \bar{x}} \quad (\text{B.12})$$

Les conditions aux frontières constituent un système linéaire pour les constantes  $C_1$  et  $C_2$ . Nous obtenons donc la solution :

$$\hat{u} = \frac{1}{\zeta s} \left[ \frac{\text{sh}(\sqrt{\zeta s} \bar{y}) + \text{sh}[\sqrt{\zeta s}(1 - \bar{y})]}{\text{sh}(\sqrt{\zeta s})} - 1 \right] \frac{\partial \hat{p}}{\partial \bar{x}} \quad (\text{B.13})$$

En intégrant l'équation de continuité, puis en exprimant la condition d'adhérence en  $\bar{y} = 1$ , nous obtenons une équation différentielle en fonction de la pression  $\bar{p}$  :

$$\hat{p} = \frac{(\zeta s)^{3/2} \text{sh}(\sqrt{\zeta s})}{2[1 - \text{ch}(\sqrt{\zeta s})] + \sqrt{\zeta s} \text{sh}(\sqrt{\zeta s})} (\hat{s} \hat{a} - 1) \cos \bar{x} + C(s) \quad (\text{B.14})$$

Nous trouvons alors l'expression de la force du fluide par intégration sur la surface du cylindre. Enfin, la transformée de Laplace de l'équation de la dynamique nous fournit l'expression de l'amplitude d'oscillation (Éq. 3.8)

### B.3 Solution pour un écoulement fluide non visqueux

Partant du système Éq.3.9, nous dérivons les équations selon  $\bar{x}$  :

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{t}} = -\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{x}^2} = -\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y} \partial \bar{t}} \quad (\text{B.15})$$

Intégrons relativement à  $\bar{y}$  en tenant compte du fait que la dérivée par rapport au temps de la vitesse  $\bar{v}$  est nulle sur la surface du cylindre :

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} = \bar{y} \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{x}^2} \quad (\text{B.16})$$

Grâce à la condition de glissement sur la paroi mobile, nous obtenons l'expression du champ de pression :

$$\left. \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} \right|_{\bar{y}=1} = \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{x}^2} = -\ddot{\bar{a}} \cos \bar{x} \Rightarrow \bar{p}(\bar{x}, \bar{t}) = C_1(\bar{t}) + \bar{x} C_2(\bar{t}) + \ddot{\bar{a}} \cos \bar{x} \quad (\text{B.17})$$

Les coefficients  $C_1(\bar{t})$  et  $C_2(\bar{t})$  sont calculés à partir des conditions initiales de pression nulle et de périodicité en  $\bar{x}$  et sont identiquement nuls. Dès lors, la pression est connue (Éq. B.18) et par intégration nous déduisons le champ de vitesse :

$$\bar{p}(\bar{x}, \bar{t}) = \ddot{\bar{a}} \cos \bar{x} \quad \bar{u}(\bar{x}, \bar{t}) = \dot{\bar{a}} \sin \bar{x} \quad \bar{v}(\bar{x}, \bar{t}) = -\dot{\bar{a}} \cos \bar{x} \quad (\text{B.18})$$

En insérant le champ de pression dans l'équation de la dynamique des structures, nous obtenons l'équation :

$$\left( \frac{\tau_m^2}{\tau_p^2} + \pi \right) \ddot{\bar{a}} + \frac{\tau_c}{\tau_p} \dot{\bar{a}} + \bar{a} = 0 \quad (\text{B.19})$$

Définissons alors les paramètres suivants pour simplifier l'écriture des équations :

$$\tau_f^2 = \tau_m^2 + \pi \tau_p^2 \quad \theta_p = \frac{\tau_p}{\tau_f} \quad \theta_c = \frac{\tau_c}{\tau_f}$$

En conséquence, nous pouvons écrire :

$$\ddot{\bar{a}} + \theta_c \theta_p \dot{\bar{a}} + \theta_p^2 \bar{a} = 0 \quad (\text{B.20})$$

C'est une équation différentielle linéaire et homogène du second ordre, dont l'équation caractéristique admet pour discriminant et pour racines :

$$\Delta = (\theta_c^2 - 4)\theta_p^2 \quad \xi = \frac{\theta_p}{2} \left( -\theta_c \pm \sqrt{\theta_c^2 - 4} \right) \quad (\text{B.21})$$

Nous cherchons les solutions pour le cas où l'amplitude de l'oscillation est pseudo-périodique ( $\Delta < 0$ ). Les racines de l'équation de la dynamique sont complexes et conjuguées :

$$\xi = \frac{\theta_p}{2} \left( -\theta_c \pm i \sqrt{\theta_c^2 - 4} \right) \quad (\text{B.22})$$



En définitive, après avoir exprimé les conditions initiales de déplacement maximum et de fluide au repos, l'amplitude de l'oscillation de la structure s'écrit :

$$\bar{a} = \left[ \cos\left(\frac{\theta_p}{2}\sqrt{4 - \theta_c^2 \bar{t}}\right) + \frac{\theta_c}{\sqrt{4 - \theta_c^2}} \sin\left(\theta_p \sqrt{4 - \theta_c^2 \bar{t}}\right) \right] \exp\left(-\frac{\theta_c \theta_p}{2} \bar{t}\right) \quad (\text{B.23})$$

La période et le décréement logarithmique d'oscillation du cylindre mobile sont respectivement  $T$  et  $D$  :

$$T = \frac{4\pi\tau_c}{\sqrt{4 - \tau_f^2/\tau_c^2}} \quad D = \frac{2\pi\tau_c/\tau_f}{\sqrt{4 - \tau_f^2/\tau_c^2}} \quad (\text{B.24})$$

## Stabilité du modèle numérique 2D

### « Cast3M Navier-Stokes »

Pour montrer que le modèle numérique 2D « Cast3M Navier-Stokes » est stable, nous avons essayé de borner l'énergie mécanique totale  $E_{mt}$  associée à la formulation variationnelle et l'algorithme de projection que nous utilisons.

Sur le problème continu, nous montrons aisément que l'énergie mécanique totale  $E_{mt}$  reste bornée en utilisant le fait que  $\nabla \cdot \underline{u} = 0$  en tout point de  $\Omega$ . Ceci n'est plus vrai dans le cas d'une formulation variationnelle, donc, au plan discret (formulation faible)  $\int_{\Omega} \pi \nabla \cdot \underline{u} \, dV = 0$ . La forme antisymétrique du terme de convection proposée par Temam [45] utilisée dans l'équation 4.3 permet de remédier à cela.

L'énergie cinétique associée à notre schéma numérique pour le fluide s'obtient alors en multipliant l'équation de la quantité de mouvement (Éq. 4.3) par  $2\Delta t \, \underline{u}^n$  et en intégrant sur  $\Omega$  :

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\int_{\Omega} (2\tilde{\underline{u}}^n \rho (\tilde{\underline{u}}^n - \tilde{\underline{u}}^{n-1}) - 2\Delta t \rho \tilde{\underline{u}}^n \tilde{\underline{u}}^{n-1} \nabla \tilde{\underline{u}}^n) \, dV}_A &= - \underbrace{\left( 2\Delta t \int_{\Omega} \rho \tilde{\underline{u}}^n \tilde{\underline{u}}^{n-1} \nabla \tilde{\underline{u}}^n \, dV + 2\Delta t \int_{\Omega} \rho \frac{|\tilde{\underline{u}}^n|^2}{2} \nabla \cdot \tilde{\underline{u}}^{n-1} \, dV \right)}_B \\
 &\quad + \underbrace{2\mu \Delta t \int_{\Omega} \tilde{\underline{u}}^n \nabla^2 \tilde{\underline{u}}^n \, dV}_C + \underbrace{2\Delta t \int_{\Omega} \tilde{\underline{u}}^n \underline{f}^n \, dV}_D - \underbrace{2\Delta t \int_{\Omega} \tilde{\underline{u}}^n \nabla p^n \, dV}_E
 \end{aligned}$$

soit :  $A = -B + C + D - E$ .

Nous introduisons l'énergie mécanique totale du système  $E_{mt}$  dans l'équation précédente :

$$E_{mt} = \frac{1}{2} m_s [(\dot{a}^n)^2 - (\dot{a}^{n-1})^2] + \frac{1}{2} k [(a^n)^2 - (a^{n-1})^2] + A =$$

$$\frac{1}{2} m_s [(\dot{a}^n)^2 - (\dot{a}^{n-1})^2] + \frac{1}{2} k [(a^n)^2 - (a^{n-1})^2] - B + C + D - E$$

Nous cherchons à évaluer chaque terme :

- En utilisant l'identité  $2a(a - b) = a^2 + (a - b)^2 - b^2$ , nous obtenons :

$$A = \|\sqrt{\rho}\tilde{\underline{u}}^n\|_o^2 + \|\sqrt{\rho}(\tilde{\underline{u}}^n - \tilde{\underline{u}}^{n-1})\|_o^2 - \|\sqrt{\rho}\tilde{\underline{u}}^{n-1}\|_o^2 - \Delta t \int_{\Omega} \tilde{\underline{u}}^{n-1} \nabla |\sqrt{\rho}\tilde{\underline{u}}^n|^2 \, dV$$

- Comme nous connaissons la valeur de  $\underline{u}$  sur les frontières, le terme B devient :

$$B = \Delta t \int_{\Omega} \rho \left[ \tilde{\underline{u}}^{n-1} \nabla |\tilde{\underline{u}}^n|^2 + |\tilde{\underline{u}}^n|^2 \nabla \tilde{\underline{u}}^{n-1} \right] \, dV = \Delta t \int_{\Omega} \rho \nabla \cdot |\tilde{\underline{u}}^n|^2 \tilde{\underline{u}}^{n-1} \, dV =$$

$$\Delta t \int_{\Gamma} \rho |\tilde{\underline{u}}^n|^2 \tilde{\underline{u}}^{n-1} \hat{n} \cdot \, dS = \Delta t \rho |\tilde{\underline{u}}^n|^2 \tilde{\underline{u}}^{n-1} \int_{\Gamma} \hat{n} \cdot \, dS = 0$$

La structure étant indéformable, à la frontière mobile, la vitesse du fluide est la vitesse de la structure. La dernière intégrale est donc bien nulle :

$$B = 0$$

- En utilisant de nouveau  $\tilde{\underline{u}} = 0$  sur les frontières fixes, nous avons :

$$C = -2\mu\Delta t \int_{\Omega} \nabla \cdot \{ \tilde{\underline{u}}^n \nabla \tilde{\underline{u}}^n \} \, dV + 2\mu\Delta t \int_{\Omega} (\nabla \tilde{\underline{u}}^n)^2 \, dV =$$

$$\underbrace{-2\mu\Delta t \int_{\Gamma} \tilde{\underline{u}}^n \nabla \tilde{\underline{u}}^n \hat{n} \cdot \, dS}_{\neq 0} + 2\mu\Delta t \|\nabla \tilde{\underline{u}}^n\|_o^2$$

Nous obtenons, donc, une injection (ou un puits) d'énergie cinétique par frottement visqueux sur la frontière.

$$C = 2\nu\Delta t \|\nabla \sqrt{\rho}\tilde{\underline{u}}^n\|_o^2 - 2\nu\Delta t \int_{\Gamma} \nabla |\sqrt{\rho}\tilde{\underline{u}}^n|^2 \hat{n} \cdot \, dS$$

- D peut être facilement borné en intégrant dans le temps :

$$D = 2\Delta t \int_{\Omega} \underline{u}^n \underline{f}^n \, dV$$

- Borner le terme E est plus compliqué.

$$E = -2\Delta t \int_{\Omega} \tilde{\underline{u}}^n \nabla (2p^{n-1} - p^{n-2}) \, dV$$

Nous multiplions l'Éq. 4.3 par le terme  $2\frac{\Delta t^2}{\rho} \nabla (2p^{n-1} - p^{n-2})$ . Nous pouvons noter que

$$2p^{n-1} - p^{n-2} = p^n - (\lambda^n - \lambda^{n-1})$$

Alors,

$$2\Delta t \int_{\Omega} \underline{u}^n (2p^{n-1} - p^{n-2}) \, dV - \underbrace{2\Delta t \int_{\Omega} \underline{\tilde{u}}^n (2p^{n-1} - p^{n-2}) \, dV}_E + 2 \frac{\Delta t^2}{\rho} \int_{\Omega} \nabla \lambda^n \nabla [p^n - (\lambda^n - \lambda^{n-1})] \, dV = 0$$

Nous utilisons la condition connue sur la vitesse aux frontières  $\underline{u}_{\Gamma} = 0$  et la continuité de masse  $\nabla \cdot \underline{u}^n = 0$  :

$$2\Delta t \int_{\Omega} \underline{u}^n (2p^{n-1} - p^{n-2}) \, dV = \underbrace{-2\Delta t \int_{\Gamma} \underline{u}^n (2p^{n-1} - p^{n-2}) \hat{n} \cdot dS}_{=0} - \underbrace{2\Delta t \int_{\Omega} (2p^{n-1} - p^{n-2}) \nabla \cdot \underline{u}^n \, dV}_{=0} = 0$$

Ensuite :

$$E + \frac{\Delta t^2}{\rho} \int_{\Omega} 2 \nabla p^n (\nabla p^n - \nabla p^{n-1}) \, dV - \frac{\Delta t^2}{\rho} \int_{\Omega} 2 \nabla \lambda^n (\nabla \lambda^n - \nabla \lambda^{n-1}) \, dV = 0$$

d'où

$$E + \Delta t^2 \left\| \frac{\nabla p^n}{\sqrt{\rho}} \right\|_o^2 - \Delta t^2 \left[ \left\| \frac{\nabla \lambda^n - \nabla \lambda^{n-1}}{\sqrt{\rho}} \right\|_o^2 - \left\| \frac{\nabla \lambda^{n-1}}{\sqrt{\rho}} \right\|_o^2 \right] = \Delta t^2 \left\| \frac{\nabla p^{n-1}}{\sqrt{\rho}} \right\|_o^2$$

De l'équation précédente, nous pouvons déduire que :

$$o = \Delta t^2 \left\| \frac{\nabla \lambda^{n-1}}{\sqrt{\rho}} \right\|_o^2 = \|\sqrt{\rho}(\underline{u}^{n-1} - \underline{\tilde{u}}^{n-1})\|_o^2$$

En retranchant  $o_{n-1}$  de  $o_n$  :

$$\frac{\rho}{\Delta t} [(\underline{u}^n - \underline{u}^{n-1}) - (\underline{\tilde{u}}^n - \underline{\tilde{u}}^{n-1})] + \nabla \lambda^n - \nabla \lambda^{n-1} = 0$$

Ensuite nous multiplions par  $2\Delta t(\underline{u}^n - \underline{u}^{n-1})$  et nous intégrons sur  $\Omega$  :

$$\|\sqrt{\rho}(\underline{u}^n - \underline{u}^{n-1})\|_o^2 + \|\sqrt{\rho}(\underline{u}^n - \underline{u}^{n-1}) - \sqrt{\rho}(\underline{\tilde{u}}^n - \underline{\tilde{u}}^{n-1})\|_o^2 - \|\sqrt{\rho}(\underline{\tilde{u}}^n - \underline{\tilde{u}}^{n-1})\|_o^2 = 0$$

Le terme  $o$  peut être exprimé aussi comme :

$$\Delta t^2 \left\| \frac{\nabla \lambda^n - \nabla \lambda^{n-1}}{\sqrt{\rho}} \right\|_o^2 = \|\sqrt{\rho}(\underline{u}^n - \underline{u}^{n-1}) - \sqrt{\rho}(\underline{\tilde{u}}^n - \underline{\tilde{u}}^{n-1})\|_o^2$$

En combinant ces deux dernières relations, nous arrivons à écrire :

$$\Delta t^2 \left\| \frac{\nabla \lambda^n - \nabla \lambda^{n-1}}{\sqrt{\rho}} \right\|_o^2 = \|\sqrt{\rho}(\underline{u}^n - \underline{u}^{n-1})\|_o^2 - \|\sqrt{\rho}(\underline{\tilde{u}}^n - \underline{\tilde{u}}^{n-1})\|_o^2$$

Ce qui conduit à :

$$E + \Delta t^2 \left\| \frac{\nabla p^n}{\sqrt{\rho}} \right\|_o^2 + \|\sqrt{\rho}(\underline{u}^{n-1} - \underline{\tilde{u}}^{n-1})\|_o^2 + \|\sqrt{\rho}(\underline{u}^n - \underline{u}^{n-1})\|_o^2 - \|\sqrt{\rho}(\underline{\tilde{u}}^n - \underline{\tilde{u}}^{n-1})\|_o^2 = \Delta t^2 \left\| \frac{\nabla p^{n-1}}{\sqrt{\rho}} \right\|_o^2$$

Finalement, nous montrons que le terme  $E$  est borné. Donc l'inégalité suivante est toujours

satisfaite :

$$\boxed{\|\sqrt{\rho}\tilde{\underline{u}}^n\|_o^2 + \Delta t^2 \left\| \frac{\nabla p^n}{\sqrt{\rho}} \right\|_o^2 + 2\mu\Delta t \|\nabla \tilde{\underline{u}}^n\|_o^2 \leq \|\sqrt{\rho}\tilde{\underline{u}}^{n-1}\|_o^2 + \Delta t^2 \left\| \frac{\nabla p^{n-1}}{\sqrt{\rho}} \right\|_o^2}$$

**D'où la stabilité.**

# Table des figures

1.1	Schéma de deux des réacteurs à neutrons rapides refroidis au sodium conçus en France . . . . .	6
1.2	Signaux de puissance neutronique enregistrés lors de l'AURN n.3 et n.4 . . . . .	6
2.1	Exemple de configurations simplifiées pour l'étude d'IFS : deux cylindres ou hexagones concentriques . . . . .	11
2.2	Deux cylindres concentriques mobiles, séparés par un anneau fluide [20] . . . . .	15
2.3	Coefficient de masse ajoutée pour deux hexagones concentriques [9] . . . . .	16
2.4	Schéma du plan transversal de la maquette Symphony [32] . . . . .	17
2.5	Coefficients de masse et d'amortissement ajoutés déduits par la solution analytique de Chen . . . . .	19
2.6	Coefficient de masse ajoutée $C_M$ et d'amortissement ajouté $C_D$ pour deux hexagones concentriques [49] . . . . .	20
2.7	Schéma de trois rangées lors des essais Symphony [3] . . . . .	22
2.8	La maquette SYMPHONY en configuration hexagonale [3] . . . . .	22
3.1	Deux cylindres concentriques séparés par un milieu fluide . . . . .	26
3.2	Carte d'écoulement d'un fluide incompressible et visqueux autour d'un solide pour de très forts confinements . . . . .	29
3.3	Échelle de pression en fonction du nombre de Stokes pour l'écoulement d'un fluide incompressible et visqueux autour d'un solide oscillant, pour de très forts confinements . . . . .	30
3.4	Vitesse tangentielle $u_\theta _{\theta=\pi/2}$ à la fin de la période pour $\eta = 0.009$ . . . . .	37
3.5	Vitesse tangentielle $u_\theta _{\theta=\pi/2}$ à la fin de la période pour $\eta = 0.03$ . . . . .	37
3.6	Vitesse tangentielle $u_\theta _{\theta=\pi/2}$ à la fin de la période pour $\eta = 0.065$ . . . . .	37
5.1	Profils de vitesse tangentielle le long d'un axe perpendiculaire au déplacement du cylindre interne à la fin de la période d'oscillation . . . . .	51
5.2	Force exercée par le fluide sur un cylindre en mouvement forcé . . . . .	52
5.3	Comparaison du coefficient de masse ajoutée en fonction du confinement dans le cas de deux cylindres concentriques . . . . .	53
5.4	Comparaison du coefficient d'amortissement en fonction du confinement dans le cas de deux cylindres concentriques . . . . .	54

5.5	Représentation géométrique des différentes définitions du jeu pour un corps hexagonal équivalent à un corps cylindrique . . . . .	56
5.6	Comparaison des profils de vitesse tangentielle $u_\theta$ entre cylindre et hexagone pour des définitions différentes du jeu . . . . .	57
5.7	Iso-valeurs de vorticité pour une fréquence d'oscillation de $f = 1$ Hz . . . . .	58
5.8	Comparaison des profils de vitesse tangentielle $u_\theta$ entre hexagone et cylindre pour différents jeux et fréquences . . . . .	59
5.9	Effets de l'orientation de l'hexagone pour le même axe de déplacement . . . . .	60
5.10	Comparaison des valeurs du coefficient de masse ajoutée $C_M$ en fonction du confinement entre hexagone et cylindre . . . . .	61
5.11	Comparaison avec la solution de Chung et Chen [9] des valeurs du coefficient de masse ajoutée pour l'hexagone . . . . .	62
5.12	Comparaison entre cylindre et hexagone du coefficient d'amortissement ajouté $C_D$ en fonction du confinement pour différentes fréquences de vibration . . . . .	62
5.13	Évolution dans le temps de l'énergie du système pour un mouvement d'oscillation libre . . . . .	63
5.14	Effets du pas de temps sur la précision du calcul sur la base du respect du bilan d'énergie du système . . . . .	64
5.15	Convergence en maillage du modèle $up\phi$ : sensibilité au nombre de mailles azimutales	64
5.16	Évolution de la masse ajoutée dans le temps . . . . .	65
5.17	Comparaison entre l'évolution de l'énergie dissipée par le fluide obtenue par le calcul « Cast3M Navier-Stokes » et celle trouvée avec $C_1$ , $C_2$ ou $C_3$ . . . . .	66
5.18	Comparaison de la force fluide trouvé par « Cast3M Navier-Stokes » et par la formulation associée à $C_M$ et $C_D$ . . . . .	67
5.19	Comparaison entre solution analytique et numérique du déplacement en fonction du temps pour un jeu fluide $b = 1$ mm . . . . .	68
5.20	Comparaison entre solution analytique et numérique « Cast3M Navier-Stokes » en fonction du temps pour différents jeux et pour une masse de 50 kg/m . . . . .	69
5.21	Profils de vitesse tangentielle $u_\theta _{\theta=90^\circ}$ à $t = 1$ s . . . . .	70
5.22	Comparaison des coefficients $C_M$ et $C_D$ donnés par la solution analytique de Chen pour mouvement imposé et des valeurs trouvées par « Cast3M Navier-Stokes » et « Cast3M $up\phi$ » pour un mouvement libre et deux cylindres concentriques . . . . .	71
5.23	Comparaison du $C_M$ et du $\xi$ pour différents jeux en fonction de la fréquence de vibration en air . . . . .	71
5.24	Comparaison des coefficients $C_M$ et du taux d'amortissement $\xi$ pour différents jeux en fonction de la masse de la structure $m_s$ . . . . .	71
5.25	Effets de la géométrie : comparaison des valeurs des coefficients $C_M$ et $C_D$ obtenues par les modèles « Cast3M Navier-Stokes » et $up\phi$ pour deux hexagones concentriques et deux cylindres concentriques . . . . .	72
6.1	Assemblage bilame : schématisation et déformée Cast3M . . . . .	80
6.2	Assemblage mono-lame : schématisation et déformée Cast3M . . . . .	81
6.3	PISE-1a : maquette mono-assemblage . . . . .	82

6.4	PISE-2c : schématisation et vue de la section transversale . . . . .	83
6.5	PISE-2c : schématisation et vue de la section longitudinale . . . . .	83
6.6	PISE-2c : maquette complète . . . . .	84
6.7	Évolution dans le temps du déplacement de l'assemblage de PISE-1a lors des vibrations libres en air mesuré avec un jauge de déformations et un vibromètre laser pour différents déplacements initiaux $a_0$ . . . . .	86
6.8	Spectre de la fréquence pour une oscillation libre en air avec déplacement initial $a_0$ de 0.5 mm pour la maquette PISE-1a et résultat obtenu par l'identification modale . . . . .	87
6.9	Plage de variation de la fréquence et du taux d'amortissement pour des vibrations libres en air de la maquette PISE-1a . . . . .	87
6.10	Évolution de la position de l'assemblage dans la maquette PISE-1a pour des oscillations libres en air avec $a_0 = 0.5$ mm pour différentes hauteurs . . . . .	89
6.11	Évolution de la position de l'assemblage dans la maquette PISE-1a pour des oscillations libres en air avec $a_0 = 2.5$ mm pour différentes hauteurs . . . . .	89
6.12	Déplacement obtenu par le vibromètre laser vs déplacement obtenu par la jauge de déformation pour une oscillation libre en air avec $a_0 = 0.5$ mm . . . . .	90
6.13	Schéma du support bilame pour l'estimation de la masse qui participe au mouvement lors de l'oscillation . . . . .	91
6.14	Comparaison entre déplacement expérimental et solution numérique 2D « Cast3M Navier-Stokes » 2D . . . . .	91
6.15	Évolution dans le temps du déplacement de l'assemblage de PISE-1a lors des vibrations libres en eau mesuré avec un jauge de déformations pour différents déplacements initiaux $a_0$ . . . . .	92
6.16	Spectre de fréquence pour une oscillation libre en eau avec déplacement initial $a_0$ de 0.5 mm pour la maquette PISE-1a et identification modale . . . . .	93
6.17	Plage de variation de la fréquence et du taux d'amortissement pour des vibrations libres en eau de la maquette PISE-1a . . . . .	94
6.18	Schéma théorique du développement d'un écoulement vertical lors d'une oscillation bidimensionnelle dans le plan transversal . . . . .	95
6.19	Schéma du plan laser visualisé : plan parallèle à la face de l'hexagone et perpendiculaire au mouvement . . . . .	96
6.20	Évolution du déplacement de l'assemblage PISE-1a mesuré lors des essais PIV . . . . .	96
6.21	Champ de vitesse $(u,w)$ sur le plan parallèle à la face de l'hexagone et perpendiculaire au mouvement à $t = 0.1$ s . . . . .	97
6.22	Profils de vitesse à deux hauteurs différentes de l'hexagone dans le plan parallèle à la face de l'hexagone et perpendiculaire au mouvement . . . . .	98
6.23	Schéma du plan laser visualisé : plan perpendiculaire à l'inter-assemblage . . . . .	99
6.24	Champ de vitesse $(v,w)$ dans le plan parallèle au déplacement et perpendiculaire à l'inter-assemblage à $t = 0.1$ s . . . . .	100
6.25	Champ de vitesse $(v,w)$ sur le plan parallèle au déplacement et perpendiculaire à l'inter-assemblage dans la partie basse de l'hexagone à $t = 0.1$ s . . . . .	101



6.26	Profils de vitesse $(v, w)$ à $z = -2\text{cm}$ sur le plan parallèle au déplacement et perpendiculaire à l'inter-assemblage dans la partie basse de l'hexagone à $t = 0.1\text{ s}$ . . . .	102
6.27	Schéma du plan laser et champ de vitesse $(u, v)$ sur le plan transversal dessus de la tête de l'hexagone à $t = 0.1\text{ s}$ . . . . .	102
6.28	Évolution du déplacement de l'assemblage de la maquette PISE-1a pour différents niveaux d'eau . . . . .	103
6.29	Champ de vitesse $(u, w)$ sur le plan parallèle à la face de l'hexagone à $t = 0.2\text{ s}$ . .	104
6.30	Comparaison entre déplacement expérimental et solution numérique 2D « Cast3M Navier-Stokes » 2D pour un essai en eau avec $a_0 = 0.5\text{ mm}$ . . . . .	105
6.31	Maillage utilisé pour le modèle « Cast3M $up\phi$ » 3D ; en rouge, la partie d'eau autour de l'hexagone . . . . .	106
6.32	Déformation de la surface libre pour une cuve remplie au $1/4$ de la hauteur dans le cas d'une oscillation libre : en rouge la section au repos et, en bleue, la section déformée . . . . .	108
A.1	Deux cylindres concentriques séparés par un milieu fluide . . . . .	113

# Liste des tableaux

5.1	Paramètres de référence pour la géométrie cylindrique . . . . .	50
5.2	Caractéristiques géométriques et propriétés du fluide . . . . .	63
5.3	Fréquences en eau $f_{eau}$ et de taux d'amortissement $\xi$ pour les déplacements de Figure 5.20 . . . . .	68
6.1	Poids de l'assemblage de la maquette PISE-1a et des ses composantes . . . . .	82
6.2	Résumé des fréquences et de taux d'amortissement trouvés lors des essais d'oscil- lation libre en air sur PISE-1a . . . . .	88
6.3	Résumé des fréquences et des taux d'amortissement trouvés lors des essais d'os- cillation libre en eau sur PISE-1a . . . . .	94
6.4	Résumé des fréquences en eau trouvées dans les simulations avec modèles bidi- imensionnels pour des essais d'oscillation libre en eau sur PISE-1a . . . . .	106
6.5	Résumé des fréquences en eau trouvées dans les simulations avec les deux modèles tridimensionnels pour des essais d'oscillation libre en eau sur PISE-1a . . . . .	107
6.6	Résumé des fréquences en eau trouvées dans les simulations avec le modèle tridi- mensionnel « Cast3M <i>up<math>\phi</math></i> » pour des essais d'oscillation libre sur PISE-1a pour différentes hauteurs d'eau . . . . .	108



# Bibliographie

- [1] ANGELUCCI, M. (2014) Validation of a Fluid-Structure Interaction 2D numerical model with analytical solution and experimental tests. Master thesis of University of Pisa.
- [2] AXISA, F. (2001) *Modélisation des systèmes mécaniques : Interaction fluide-structure*. Hermes Science Publications.
- [3] BROCC, D. (2012) Comportement dynamique des cœurs RNR-Na : Interprétation des essais SYMPHONY (séisme) et Rapsodie (injection). Rapport technique CEA-Saclay DEN/DANS/DM2S/SEMT/EMSI/11-008/A.
- [4] BERCOVIER, M., ET PIRONNEAU, O. (1979) Error estimates for finite element solution of the Stokes problem in the primitive variables. *Numer. Math.*, **(33)**, 221-224.
- [5] BROCHARD, D., BULAND, P., HAMMAMI, L., ET GANTENBEIN, F. (1989) FBR core seismic analysis. In *SMiRT 10, INIS Collection*.
- [6] CARDOLACCIA, J. (2012) Modèle 3D d'un cœur Phénix simplifié sous EUROPLEXUS : Simulation du phénomène de gerbage avec couplage fluide-structure. Rapport technique CEA-Saclay DEN/DANS/DM2S/SEMT/EMSI/11-023/A.
- [7] CAST3M WEB SITE, <http://www-cast3m.cea.fr/>
- [8] CHEN, S., WAMBSGANSS, M. W., ET JENDRZEJCZYK, J. A. (1976) Added mass and damping of a vibrating rod in confined viscous fluids. *Journal of Applied Mechanics* , 325-329.
- [9] CHUNG, H., ET CHEN, S. S. (1984) Hydrodynamic mass. Rapport technique CONF-840647-9 Argonne National Laboratory.
- [10] CROUZEIX, M. ET RAVIART, P.A. (1973) Conforming and non conforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations. *R.A.I.R.O., 7ème année*, 33-76.
- [11] (2013) DAOGANG, L., AIGUO, L., CHAOHAO, S., JUNJIE, D., YANG, H., ET QINGYU, X. Experimental investigation on fluid-structure-coupled dynamic characteristics of the double fuel assemblies in a fast reactor. *Nuclear Engineering and Design* , **(255)**, 180-184.

- [12] DESBONNETS, Q., ET BROU, D. (2011) Fluid structure interaction modeling for the vibration of tube bundles, Part I : Analysis of the fluid flow in a tube bundle. In *ASME PVP division Conference*, Baltimore, Maryland, USA .
- [13] DESBONNETS, Q., ET BROU, D. (2011) Fluid structure interaction modeling for the vibration of tube bundles, Part II : Homogenization method based on the Navier-Stokes equations. In *ASME PVP division Conference*, Baltimore, Maryland, USA.
- [14] DONEA, J., HUERTA, A., PONTOT, J.-P., ET RODRIGUEZ-FERRAN, A. (2004) Arbitrary Lagrangian-Eulerian Method. *Encyclopedia of Computational Mechanics*.
- [15] DUARTE, F., GORMAZ, R., ET NATESAN, S. (2004) Arbitrary Lagrangian-Eulerian method for Navier-Stokes equations with moving boundaries. *Computer Methods for Applied Mechanics and Engineering*, (**193**), 4819-4836
- [16] DE MORAIS, M. V. G., GIBERT, R.-J., BAJ, F., ET MAGNAUD, J.-P. (2006) Numerical analysis of fluid-elastic instability in a square tube bundle - ALE and transpiration methods. In *Proceedings of ASME PVP 2006 (PVP2006-ICPVT-11)*.
- [17] DE MORAIS, V. G., BAJ, F., GIBERT, R.-J., ET MAGNAUD, J.-P. (2007) Numerical inertia and damping coefficients determination of a tube-bundle in incompressible viscous laminar fluid. *Latin American Journal of Solids and Structures* , (**4**), 179-202.
- [18] DUMAZ, P., ALPY, N., BROU, D., CARDOLACCIA, J., GUENAUT, C., HOURCADE, E., MARTINE, L., JOLLY ; J.A., MASONI, P., PASCAL, V., SIMON, N., ET SCHIMDT, N. (2012) Avancement des études AURN. Rapport technique CEA-Cadarache DEN/CAD/DER/SESI/DIR/NT DR 1 .
- [19] FARHAT, C., GEUZAIN, P., ET GRANDMONT, C. (2001) The discrete geometric conservation law and the nonlinear stability of ALE schemes for the solution of flow problems on moving grids. *Journal of Computational Physics*, (**174-2**), 669-694.
- [20] FRITZ, R. J. (1972) The effect of liquids on the dynamic motions of immersed solids. *Journal of Engineering for Industry*, 167-173.
- [21] FUJITA, K. (1981) Vibrational characteristics and seismic response analysis of columns group in liquid. *The Japan Society of Mechanical Engineers*, (**24**), 1994-2002.
- [22] GERMAIN, P. (1970) *Mécanique des milieux continus*. ED. Masson, Paris.
- [23] GUERMOND, J.-L. (1999) Un résultat de convergence d'ordre deux en temps pour l'approximation des équations de Navier-Stokes par une technique de projection incrémentale. *Modélisation mathématique et Analyse Numérique*, (**33**), 169-189.
- [24] GUIDEZ, J., GOUX, D., JOLLY, J., VANIER, M., ET DUPRAZ, R. (2008) Scenario explicatif des quatre arrêts par réactivité négative (AU/RN) survenus à Phénix en 1989 et 1990. Rapport technique CEA/DEN/DSNI/DIR DO 225

- [25] HUERTA, A. (1988) Viscous flow structure interaction. *Journal of Pressure Vessel Technology* , (110), 15-21.
- [26] JUANG, J. N., COOPER, J. E. ET WRIGHT, J. R. (1988) An eigensystem realization algorithm using data correlations (ERA/DC) for modal parameter identification. *Control-theory and Advanced Technology*, (4-1), 15-21.
- [27] [www.keyence.fr/products/measure/laser-1d/lk-g3000/specs/index.jsp](http://www.keyence.fr/products/measure/laser-1d/lk-g3000/specs/index.jsp)
- [28] KOO, G.-H., ET LEE, J. H. (2007) An experimental study on LMR core seismic behavior with fluid couplings between closely spaced hexagons. *Journal of Mechanical Science and Technology*, (21), 1008-1017.
- [29] MELLIER, F., ET BOSQ, J.C. (2001) Phénix : Étude de l'impact des assemblages DAC sur les assemblages fertiles voisins. *Rapport technique CEA/DEN/CAD/DER/SPRC/LEDC 01-411*
- [30] MEUNIER, P. ET LEWECKE, T. (2003) Analysis and treatment of errors due to high velocity gradients in particle image velocimetry. *Experiments in Fluids*, (35), 408-421.
- [31] MORAND, H. J. P. ET OHAYON, R. (1992) *Interactions fluides-structures (Vol. 23)* Masson, Paris.
- [32] MOUSSOU, P. (2010) Projet réacteurs du futur GEN IV - livrable 10b : apport de l'interaction fluide structure dans la réponse dynamique des cœurs. simulation numérique des essais Symphony par approche potentielle 2d. Rapport technique EDF R&D H-T61-2009-03534-FR, Clamart.
- [33] MULCAHY, T. M. (1980) Fluid forces on rods vibrating in finite length annular regions. *Journal of Applied Mechanics* , 1980, (47) 234-240.
- [34] PAIDOUSSIS, M. P. (1998) *Fluid-Structure Interactions*. Accademic Press.
- [35] PASCAL, V., GASTALDI, B., ET VANIER, M. (2008) Phénix-Essais fin de vie : calculs neutroniques en soutien à l'essai « Échauffement DAC-fertiles». Rapport technique CEA-Cadarache DEN/CAD/DER/SPRC/LEDC 08-415
- [36] PASQUINI, M.-E. (2011) Developement of physical model for vapour explosion in superheated sodium. Master thesis of University of Pisa.
- [37] SARGENTINI, L. (2014) Compte rendu des test d'un dispositif d'injection rapide pour les installations expérimentales PISE-1a et PISE-2c. Rapport technique CEA-Saclay DEN/DANS/DM2S/STMF/LATF/NT/13-058/A
- [38] SARGENTINI, L., CARITEAU, B. ET MAGNAUD, J.-P. (2014) Étude d'un système d'injection : développement et validation d'un modèle monodimensionnel pour fluide incompressible et non-visqueux. Rapport technique CEA-Saclay DEN/DANS/DM2S/STMF/LATF/NT/13-061/A

- [39] SARGENTINI, L., CARITEAU, B. ET ANGELUCCI, M.(2014) Experimental test and computational model for fluid-structure interaction in an enclosed hexagonal assembly. In *ASME PVP division Conference*, Anaheim, USA.
- [40] SARGENTINI, L., MONAVON A. ET MAGNAUD, J.-P.(2014) Oscillations libres et imposées en milieu confiné : analyse de l'écoulement du fluide et solution analytiques du champ de vitesse et pression. Rapport technique CEA-Saclay DEN/DANS/DM2S/STMF/LATF/ en publication, Novembre 2014.
- [41] SCHLICHTING, H., ET GESTERN, K. (1968) *Buondary Layer Theory*. McGraw Hill.
- [42] SEMERARO, E. (2014) *Experimental investigation on hydrodynamic phenomena associated with postulated vapor explosion scenarios in the Phénix reactor*. Mémoire de thèse, UPMC-Paris VI.
- [43] SHINOHARA, Y., ET SHIMOGO, T. (1981) Vibrations of square and hexagonal cylnders in liquid. *Journal of Pressure Vessel Technology*, (**103**), 233-239.
- [44] SIGRIST, J.-F., ET BROU, D. (2012) Méthodes numériques de calculs couplés fluide/structure - méthode d'homogénéisation pour l'analyse vibratoire de faisceaux tubulaires. *Dossier techniques de l'ingénieur BM* , (**5**) 1-29.
- [45] TEMAM, R. (1984) Navier-Stokes equations American mathematical Society.
- [46] VERPEAUX,P., ET CHARRAS,T. (2013) Dynamique du solide : modification du schéma de Newmark aux cas non-linéaires. In *CSMA, Giens*.
- [47] WILSON, D. E. (1991) Added mass and damping coefficients for hexagonal cylinder. *Journal of Fluids and Structures*, (**5**), 503-519.
- [48] YANG, C.-I., ET MORAN, T. J. (1979) Finite-element solution of added mass and damping of oscillation rods in viscous fluids. *Journal of applied mechanics* , (**46**), 519-523.
- [49] YANG, C.-I., ET MORAN, T. J. (1980) Calculation of added mass and damping coefficients for hexagonal cylinders in a confined viscous fluid. *Journal of Pressure Vessel Technology* , (**102**), 152-157.